JST CRESTシンポジウム
「ビッグデータ利活用のための基盤構築とその応用」

マッチング相関分析の一致性についての考察

概要：

CCAの拡張であるCross-view Graph Embedding(別名：マッチング相関分析)について，新たな生成モデルを提案し，マッチングの一致性を調べた．

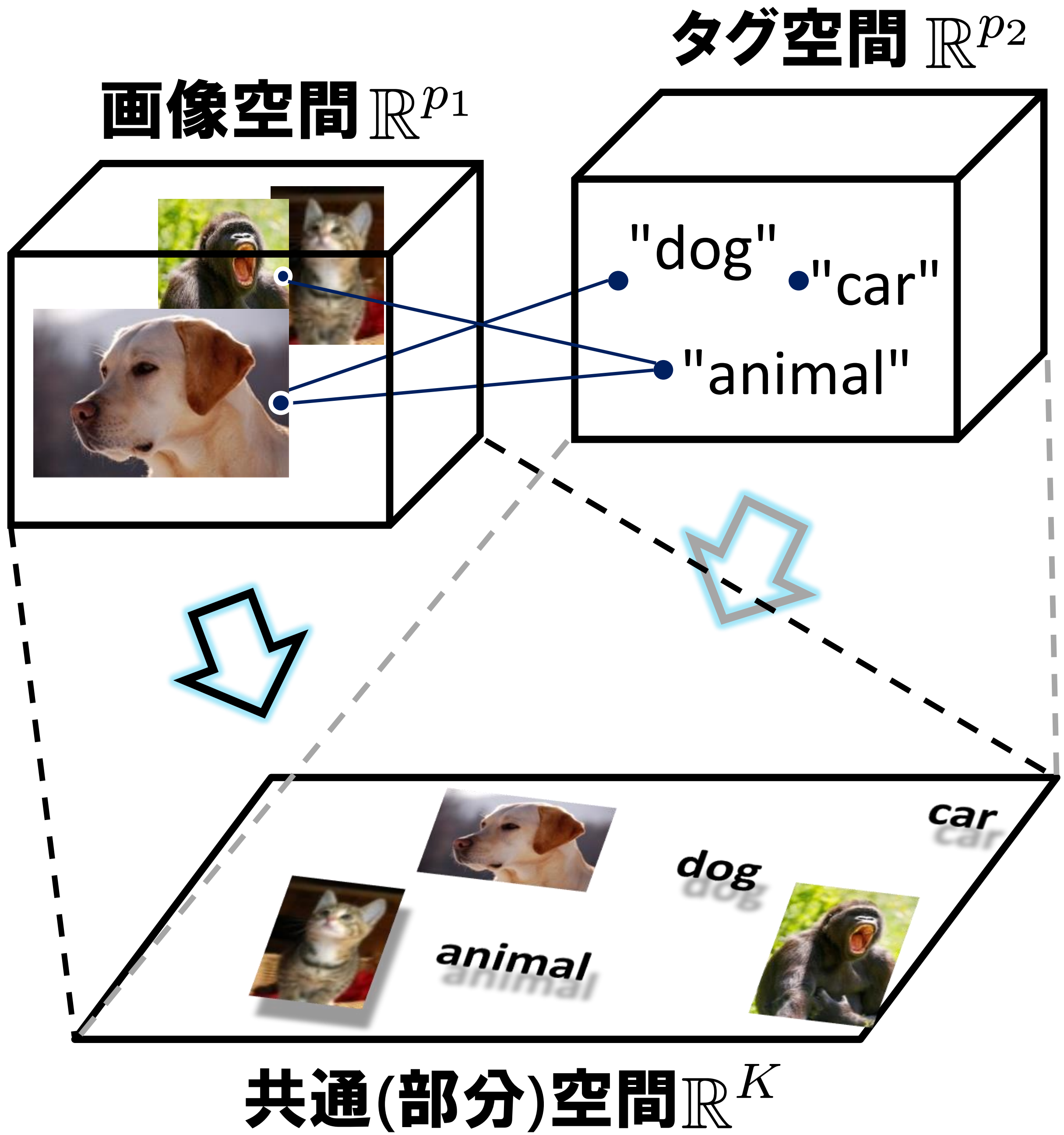
大阪大学大学院 基礎工学研究科
奥野彰文 下平英寿

目次

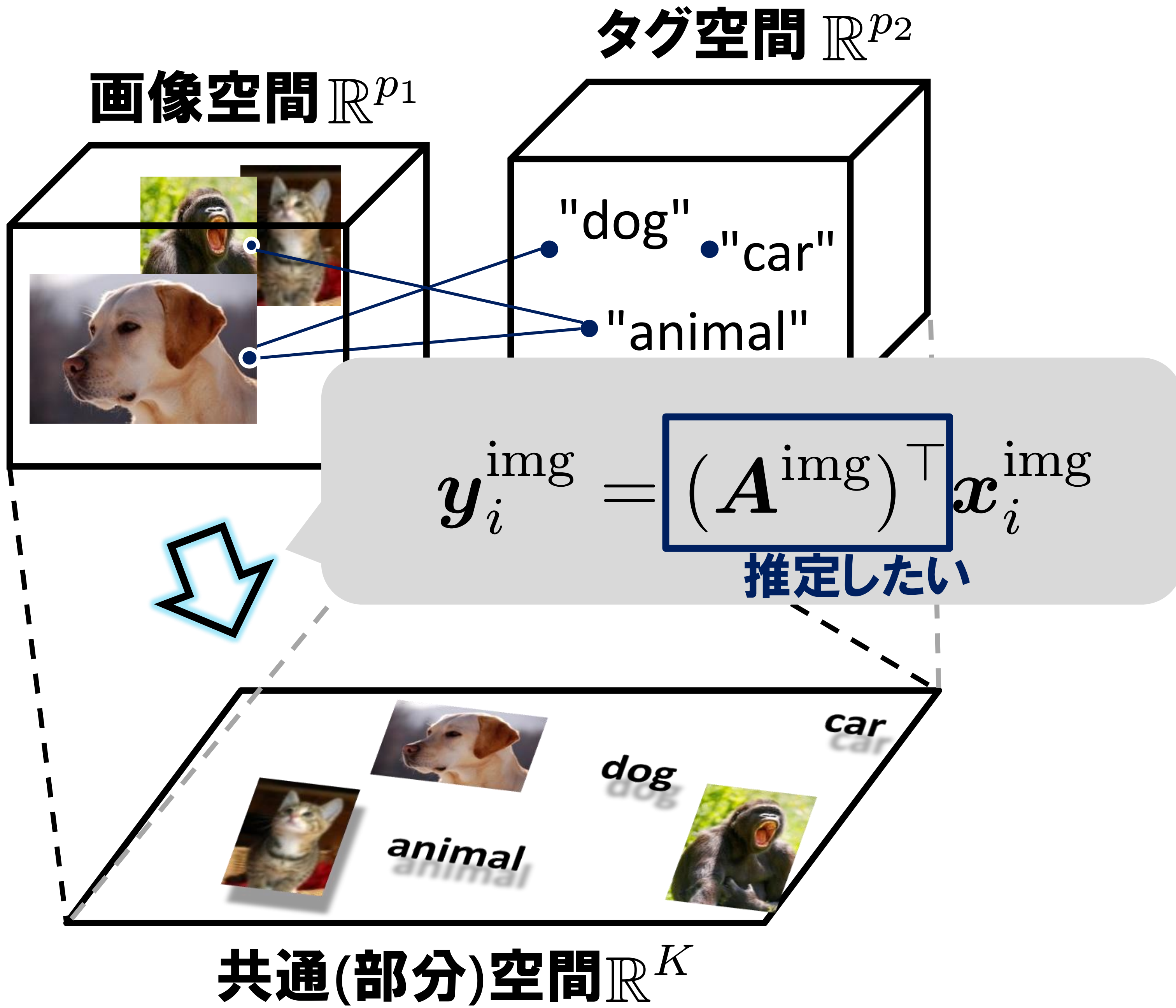
- 既存研究：Cross-view Graph Embedding
- 生成モデルの提案
  - 既存のモデル紹介と，その拡張の提案
- Matching Consistency
  - Matching Consistencyの定義
  - 主要な結果

目次

- 既存研究：Cross-view Graph Embedding
- 生成モデルの提案
  - 既存のモデル紹介と，その拡張の提案
- Matching Consistency
  - Matching Consistencyの定義
  - 主要な結果



タグ空間 $\mathbb{R}^{p_2}$
画像空間 $\mathbb{R}^{p_1}$
"dog"
"car"
"animal"
car
dog
animal
共通(部分)空間$\mathbb{R}^{K}$


タグ空間 $\mathbb{R}^{p_2}$
画像空間 $\mathbb{R}^{p_1}$
"dog"
"car"
"animal"
$\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{img}} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{img}})^\top \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{img}}$
推定したい
car
dog
animal
共通(部分)空間 $\mathbb{R}^K$

目的関数（Interのみ）

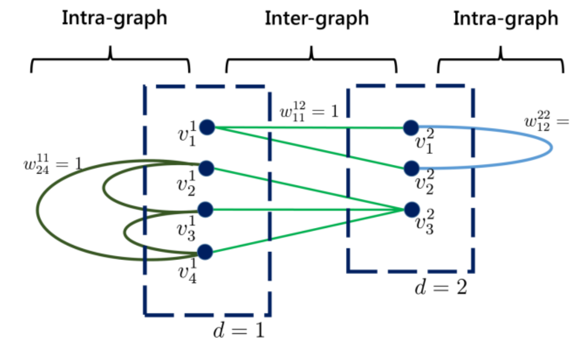
$$\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{img}}} \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{tag}}} w_{ij} \| (\boldsymbol{A}^{\mathrm{img}})^\top \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{img}} - (\boldsymbol{A}^{\mathrm{tag}})^\top \boldsymbol{x}_j^{\mathrm{tag}} \|_2^2$$

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{img}} \text{と} \ \boldsymbol{x}_j^{\mathrm{tag}} \text{が接続}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

二次等式制約の下で最適化

➡ 一般化固有値問題

Cross-view Graph Embedding (CvGE)
(Huang et al., (2012) [1])



（正規化した）損失関数

$$L(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2) := \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{w}_{ij}^{12} \|(\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_i^1 - (\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_j^2\|_2^2 \quad \text{Inter}$$

$$+ \frac{\beta_1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{i'=1}^{n_1} \tilde{w}_{ii'}^{11} \|(\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_i^1 - (\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_{i'}^1\|_2^2$$

$$+ \frac{\beta_2}{2} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{j'=1}^{n_2} \tilde{w}_{jj'}^{22} \|(\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_j^2 - (\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_{j'}^2\|_2^2 \quad \text{Intra}$$

$$\left(\tilde{w}_{ij}^{12} := w_{ij}^{12} \Big/ \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} w_{ij}^{12},\ \tilde{w}_{ii'}^{dd} := w_{ii'}^{dd} \Big/ \sum_{i=1}^{n_d} \sum_{\substack{i'=1 \\ i \neq i'}}^{n_d} w_{ii'}^{dd},\ (d \in [2]) \right)$$

CvGEの特殊な形

正準相関分析（Canonical Correlation Analysis, CCA）[2]

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{p_y} \ni \boldsymbol{y}_i & \mapsto \quad \boldsymbol{A}_y^\top \boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^K \\ \mathbb{R}^{p_x} \ni \boldsymbol{x}_i & \mapsto \quad \boldsymbol{A}_x^\top \boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^K \end{cases} \qquad \mathop{\arg\min}_{(\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{A}_y) \in \mathcal{S}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{A}_y^\top \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{A}_x^\top \boldsymbol{x}_i\|^2$$

重回帰（目的変数が多次元）

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{p_y} \ni \boldsymbol{y}_i & \mapsto \quad \boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^{p_y} \\ \mathbb{R}^{p_x} \ni \boldsymbol{x}_i & \mapsto \quad \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{p_y} \end{cases} \qquad \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p_x \times p_y}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{x}_i\|_2^2$$

重回帰（目的変数が一次元）

$$\begin{cases} \mathbb{R}^1 \ni y_i & \mapsto \quad y_i \in \mathbb{R}^1 \\ \mathbb{R}^p \ni \boldsymbol{x}_i & \mapsto \quad \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \qquad \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^n (y_i - \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{x}_i)^2$$

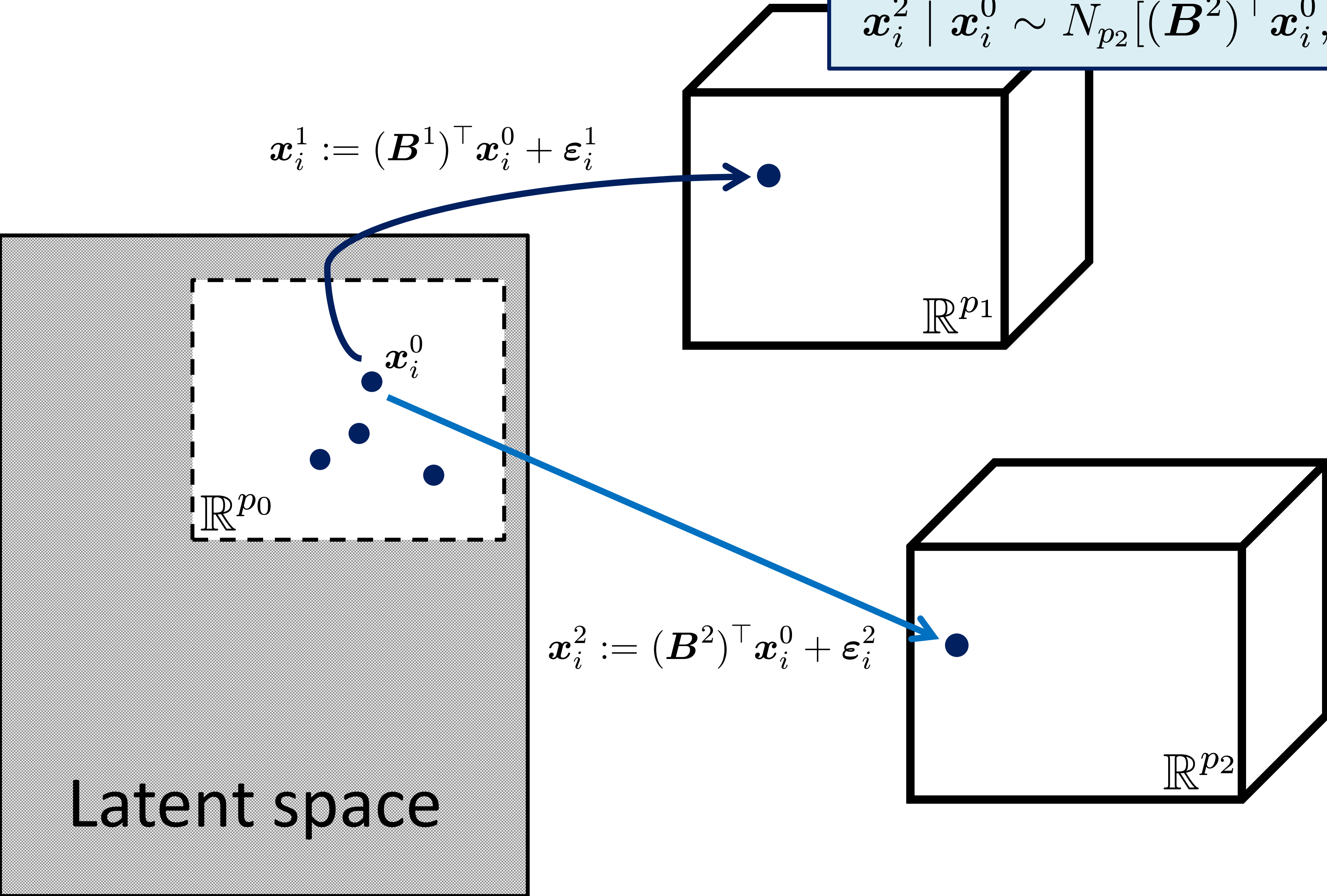
目次

- 既存研究：Cross-view Graph Embeddingの紹介
- 生成モデルの提案
  - 既存のモデル紹介と，その拡張の提案
- Matching Consistency
  - Matching Consistencyの定義
  - 主要な結果

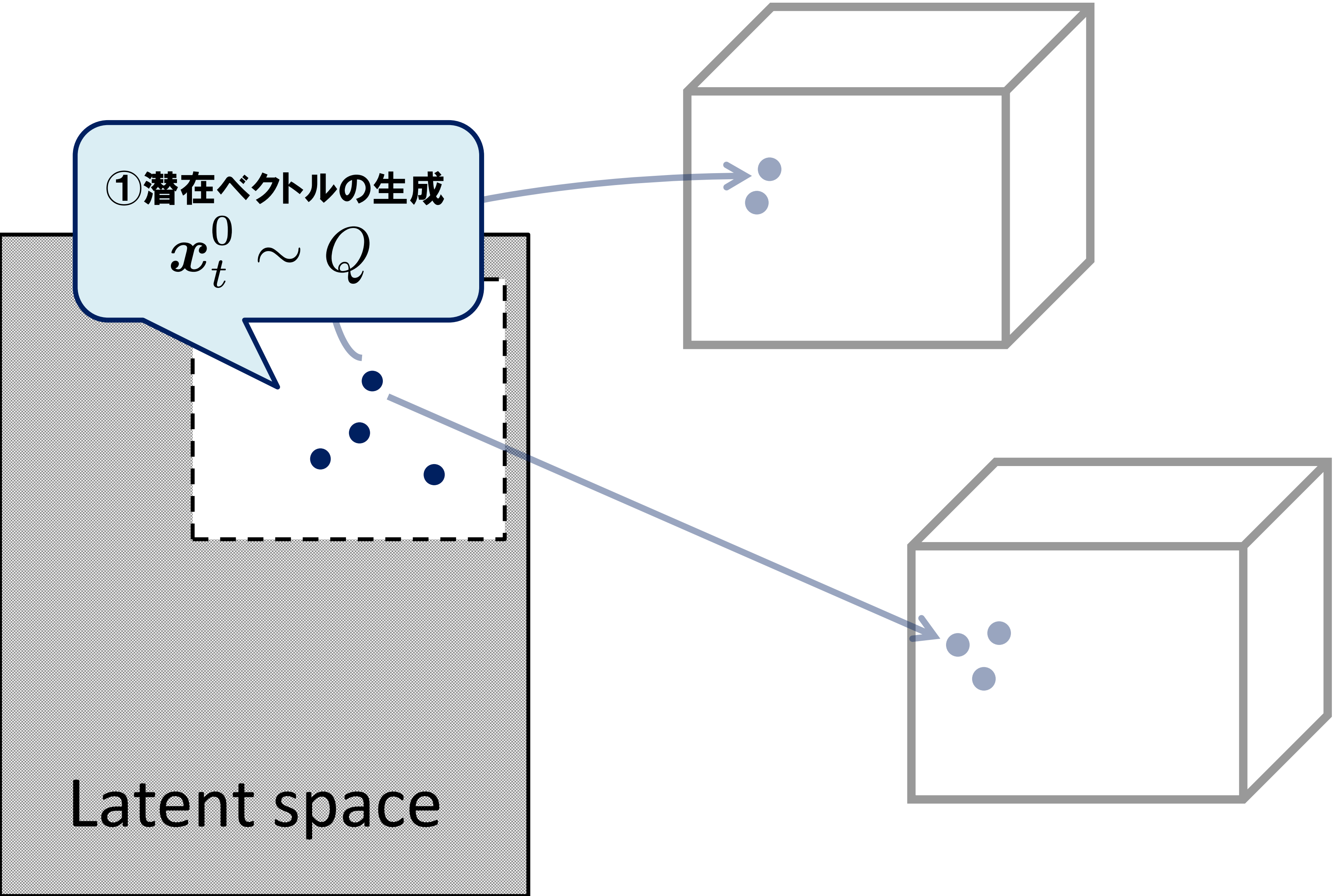
既存のモデル (for CCA)

Bach and Jordan (2005)[3]

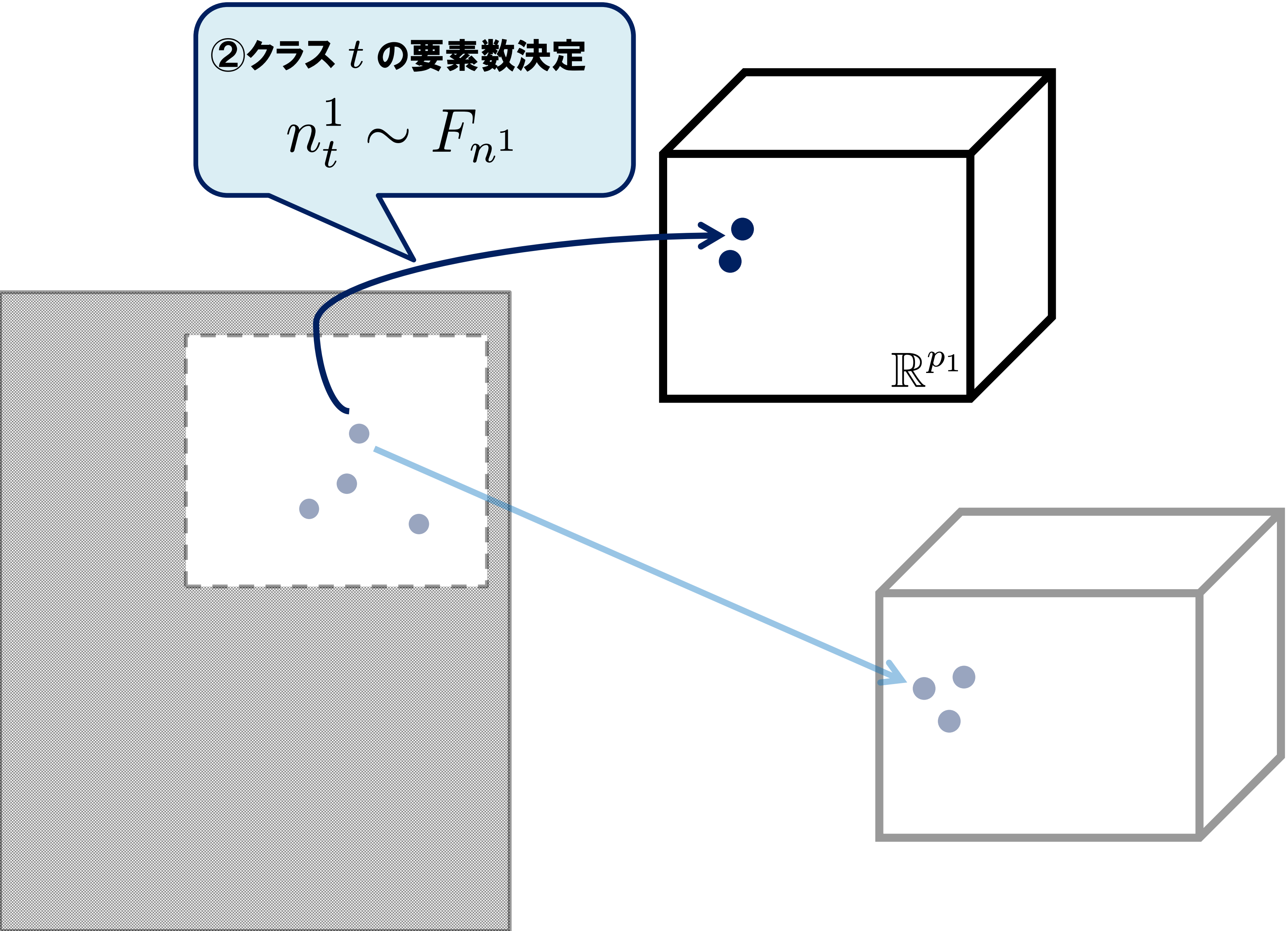
$$\boldsymbol{x}_i^0 \sim N_{p_0}[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_X]$$
$$\boldsymbol{x}_i^1 \mid \boldsymbol{x}_i^0 \sim N_{p_1}[(\boldsymbol{B}^1)^\top \boldsymbol{x}_i^0, \boldsymbol{\Sigma}^1]$$
$$\boldsymbol{x}_i^2 \mid \boldsymbol{x}_i^0 \sim N_{p_2}[(\boldsymbol{B}^2)^\top \boldsymbol{x}_i^0, \boldsymbol{\Sigma}^2]$$



提案するモデル



提案するモデル

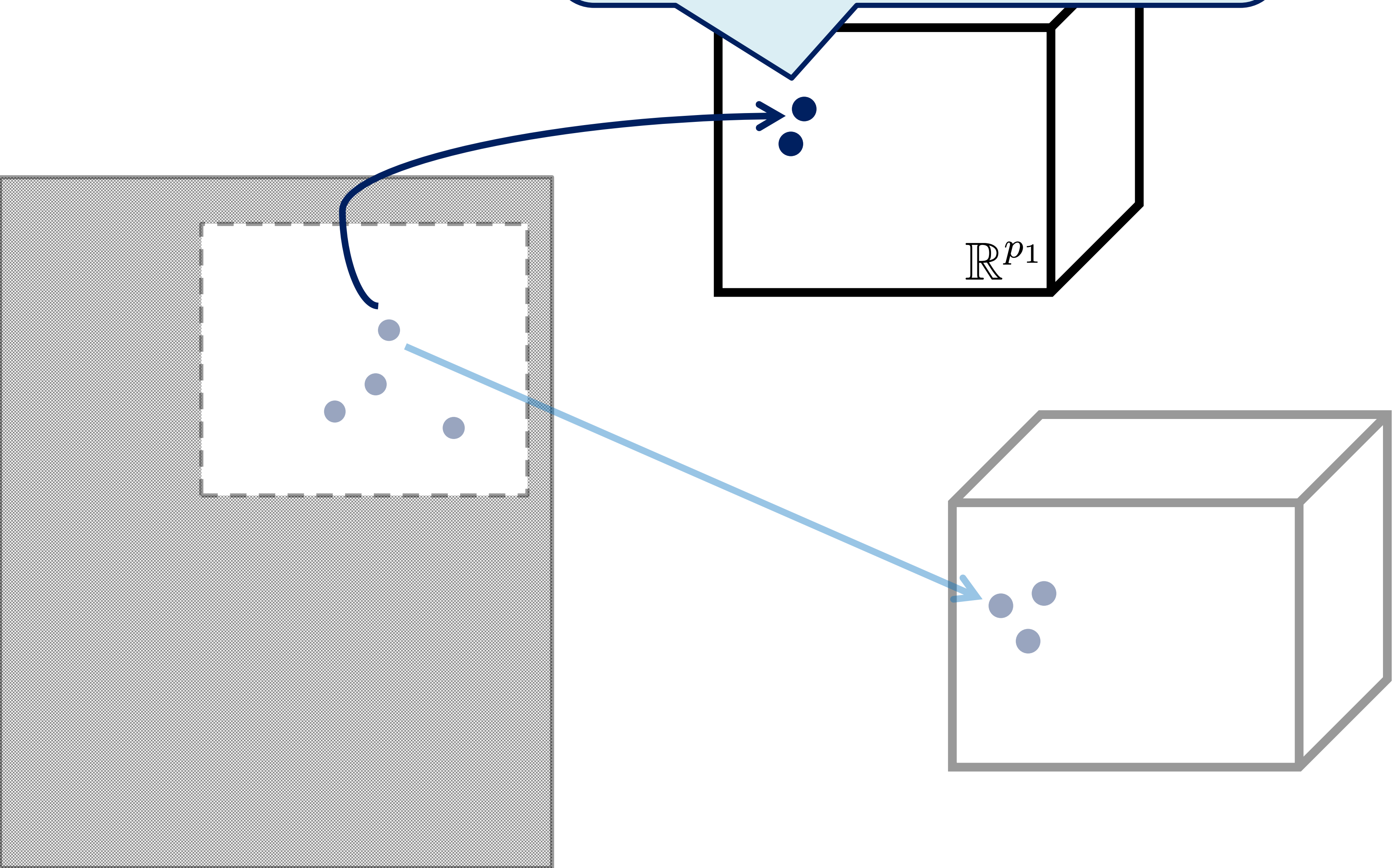


提案するモデル

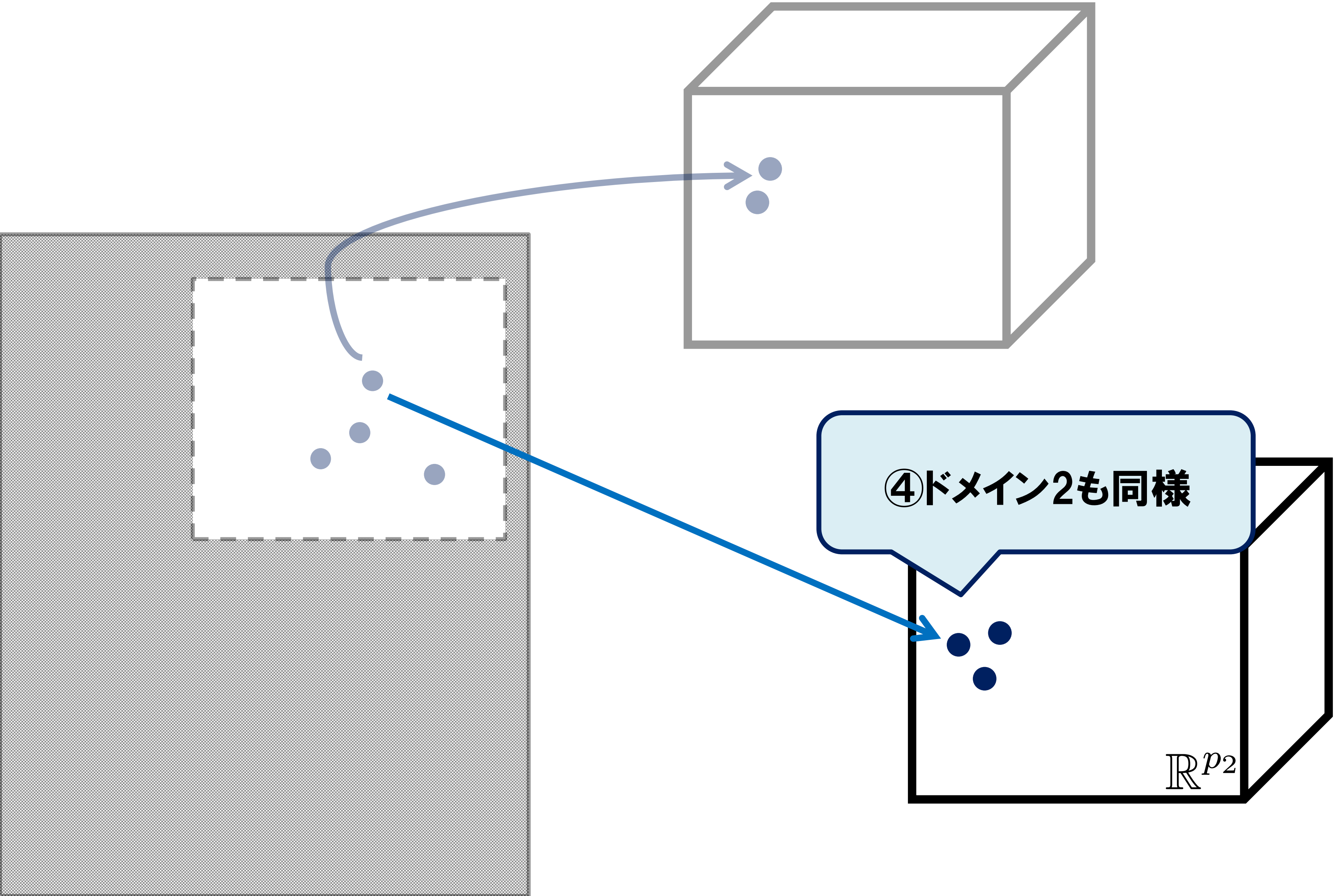
③クラス t のベクトル生成

$$\boldsymbol{x}_{t,i}^1 \mid \boldsymbol{x}_t^0 \sim N_{p_1}[(\boldsymbol{B}^1)^\top \boldsymbol{x}_t^0, \boldsymbol{\Sigma}^1]$$

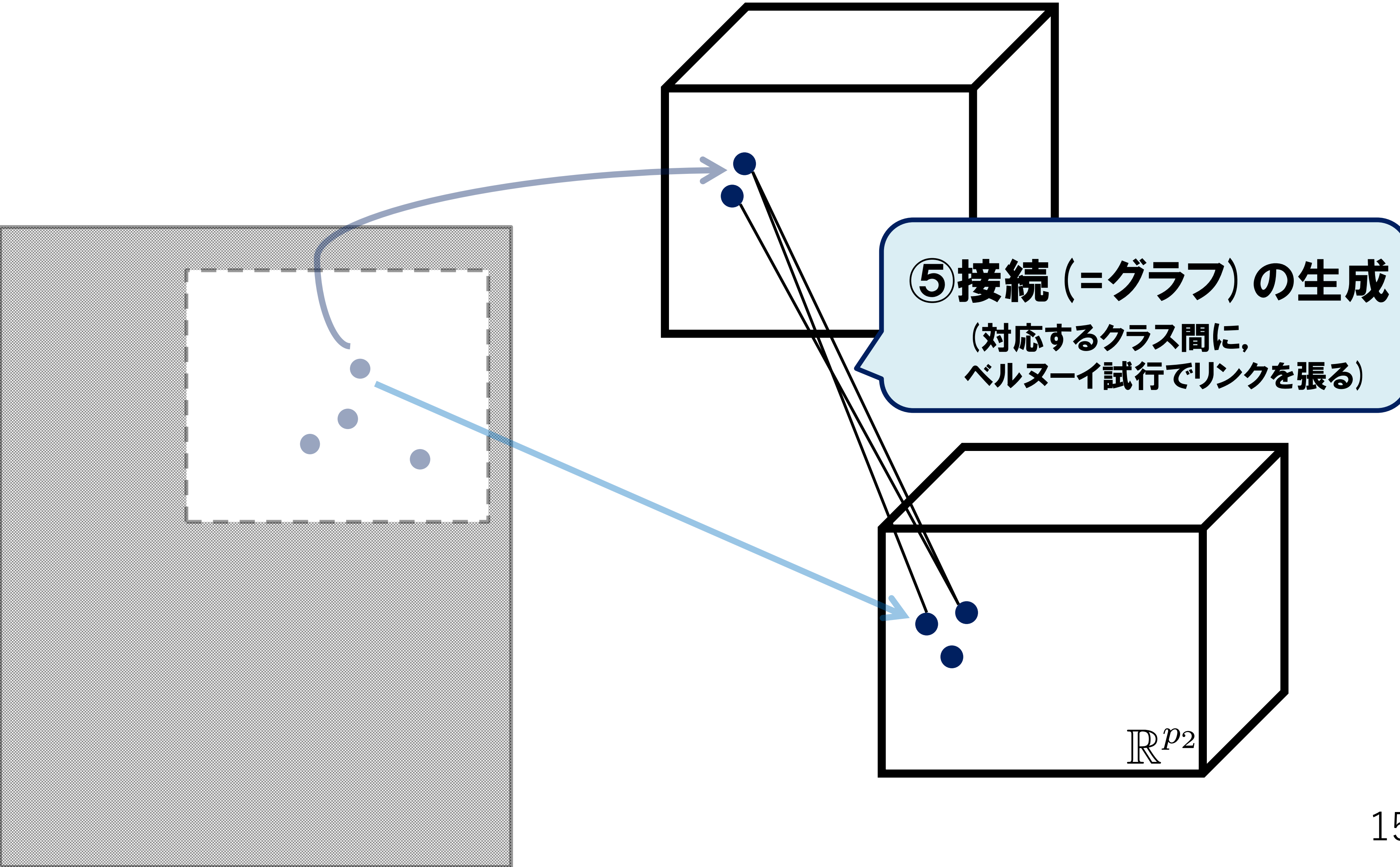
$$(i = 1, 2, \cdots, n_t^1)$$



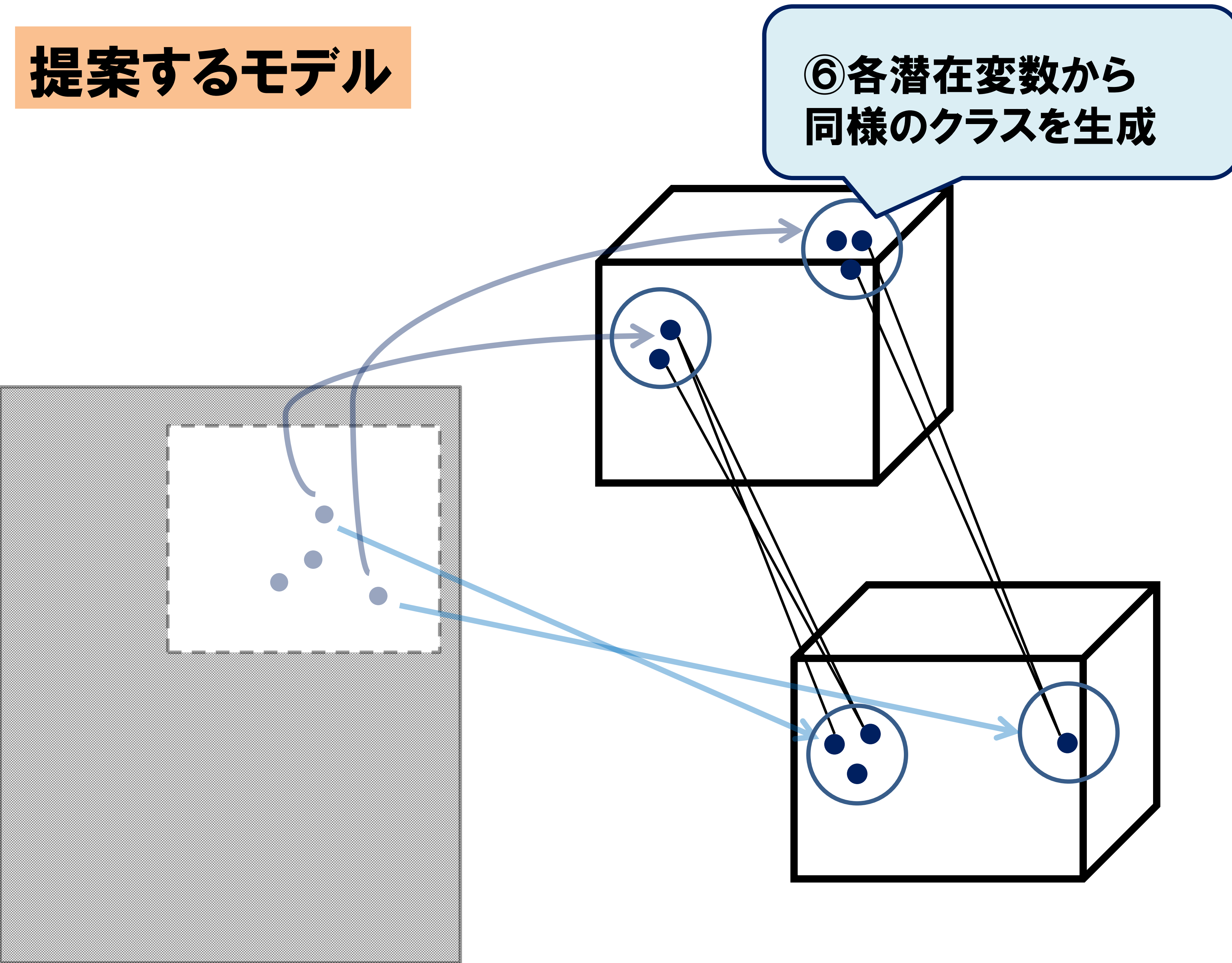
提案するモデル



提案するモデル



提案するモデル



提案するモデル

得られたもの：
大量のベクトル（クラス）と，その接続の情報

	やること
クラス数	無限大へ
各クラスのサイズ	有限(r.v.)

目次

- 既存研究：Cross-view Graph Embedding
- 生成モデルの提案
  - 既存のモデル紹介と，その拡張の提案
- Matching Consistency
  - Matching Consistencyの定義
  - 主要な結果

一致性の定義

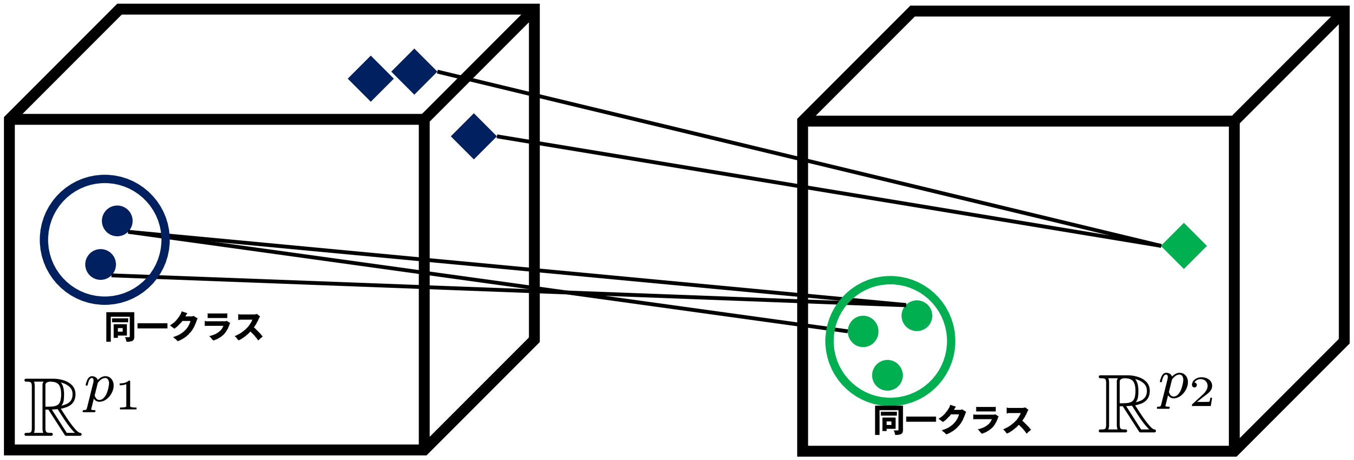
線形回帰では：$\hat{\boldsymbol{\beta}}_n \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}$

真の解

正準相関分析では：「真の解」が存在しない

一致性をどう定義するか？

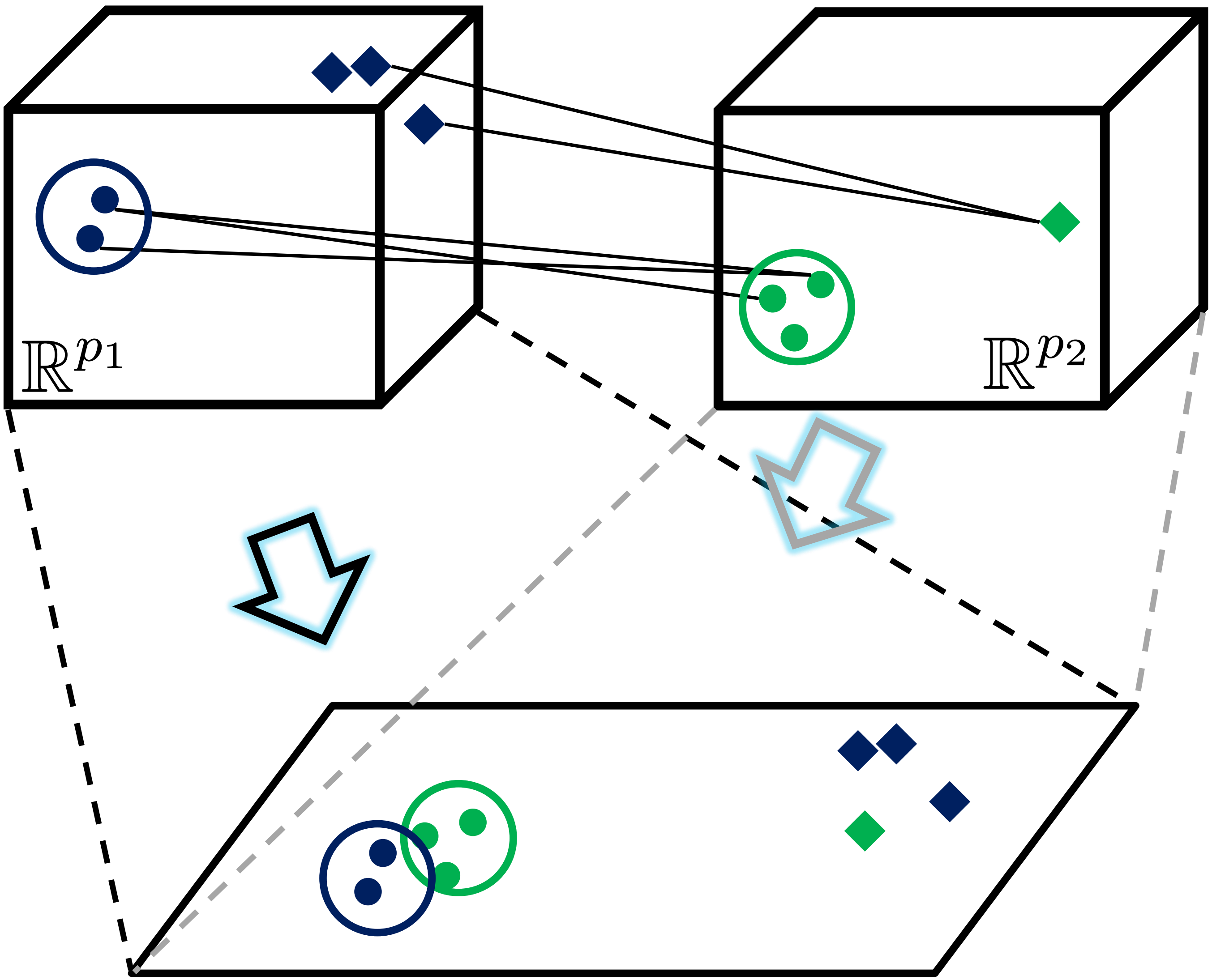
我々が使える情報

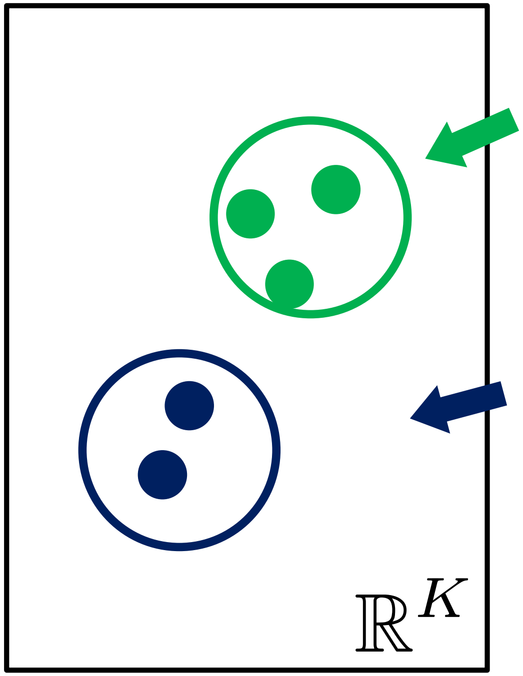


$\{\boldsymbol{x}_i^1\}_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{R}^{p_1}$　　$\{\boldsymbol{x}_j^2\}_{j=1}^{n_2} \subset \mathbb{R}^{p_2}$

と，そのマッチングウェイト $\{w_{ij}\}_{i,j=1}^{n_1,n_2} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\hat{\boldsymbol{A}}^1 : \mathbb{R}^{p_1} \to \mathbb{R}^K$ $\hat{\boldsymbol{A}}^2 : \mathbb{R}^{p_2} \to \mathbb{R}^K$





ドメイン1からの射影

$$(\hat{\boldsymbol{A}}^1)^\top \boldsymbol{x}_{t,i}^1 \mid \boldsymbol{x}_t^0 \sim N[(\boldsymbol{B}^1\hat{\boldsymbol{A}}^1)^\top \boldsymbol{x}_t^0, (\hat{\boldsymbol{A}}^1)^\top \boldsymbol{\Sigma}^1 \hat{\boldsymbol{A}}^1]$$

ドメイン2からの射影

$$(\hat{\boldsymbol{A}}^2)^\top \boldsymbol{x}_{t,j}^2 \mid \boldsymbol{x}_t^0 \sim N[(\boldsymbol{B}^2\hat{\boldsymbol{A}}^2)^\top \boldsymbol{x}_t^0, (\hat{\boldsymbol{A}}^2)^\top \boldsymbol{\Sigma}^2 \hat{\boldsymbol{A}}^2]$$

$$\mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{A}}; \boldsymbol{B}) := E_{\boldsymbol{x}_t^0}[\underline{\|(\boldsymbol{B}^1\hat{\boldsymbol{A}}^1)^\top \boldsymbol{x}_t^0 - (\boldsymbol{B}^2\hat{\boldsymbol{A}}^2)^\top \boldsymbol{x}_t^0\|_\mathrm{F}^2}]$$

クラスタ射影の理論的中心の距離

Matching Consistent $\overset{\text{def}}{\iff} \operatorname*{p\,lim}_{n_0\to\infty} \mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{A}}; \boldsymbol{B}) = 0$

損失関数（再掲）

$$L(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2) := \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{w}_{ij}^{12} \|(\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_i^1 - (\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_j^2\|_2^2$$

Inter

$$+ \frac{\beta_1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{i'=1}^{n_1} \tilde{w}_{ii'}^{11} \|(\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_i^1 - (\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_{i'}^1\|_2^2$$

$$+ \frac{\beta_2}{2} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{j'=1}^{n_2} \tilde{w}_{jj'}^{22} \|(\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_j^2 - (\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_{j'}^2\|_2^2$$

Intra

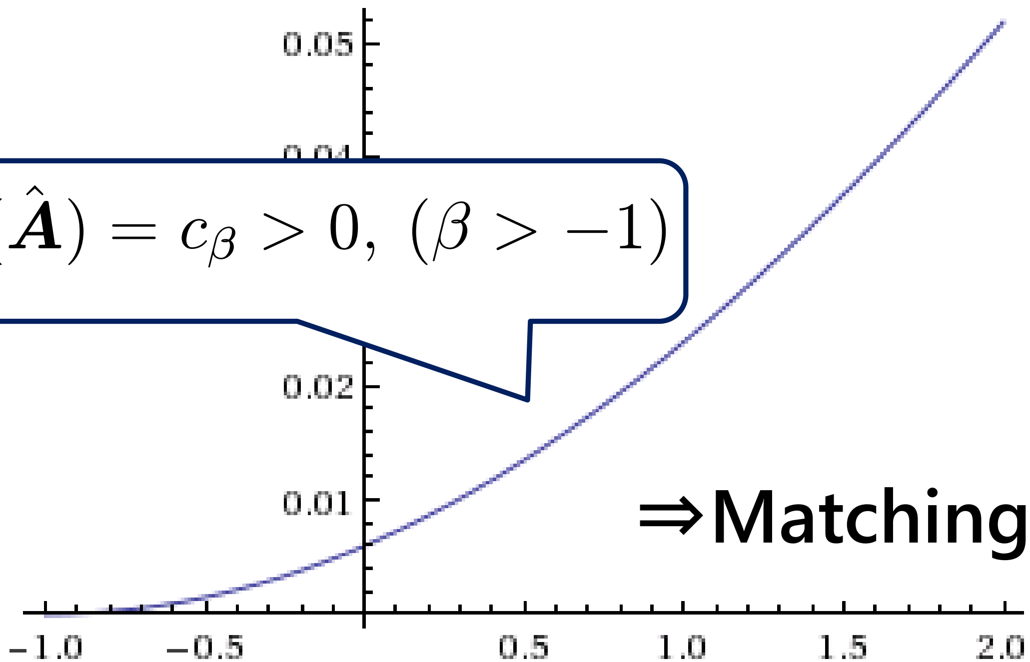
$\beta := \beta_1 = \beta_2$:Intra-termsの影響力を調節

実際にやってみると...

$$p_0 = 1, p_1 = 2, p_2 = 2, K = 1,$$

$$\boldsymbol{B}^1 = (1,1), \boldsymbol{B}^2 = (0,1), \boldsymbol{\Sigma}^1 = \boldsymbol{\Sigma}^2 = \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{\Sigma}_X = 1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname*{p\,lim}_{n_0 \to \infty} \mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{A}}) = \frac{1}{12}\left(7 + \frac{\beta - 48}{\sqrt{\beta^2 + 48}}\right), \ (\beta \geq -1)$$



$$\operatorname*{p\,lim}_{n_0 \to \infty} \mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{A}}) = c_\beta > 0, \ (\beta > -1)$$

⇒Matching Incosistent

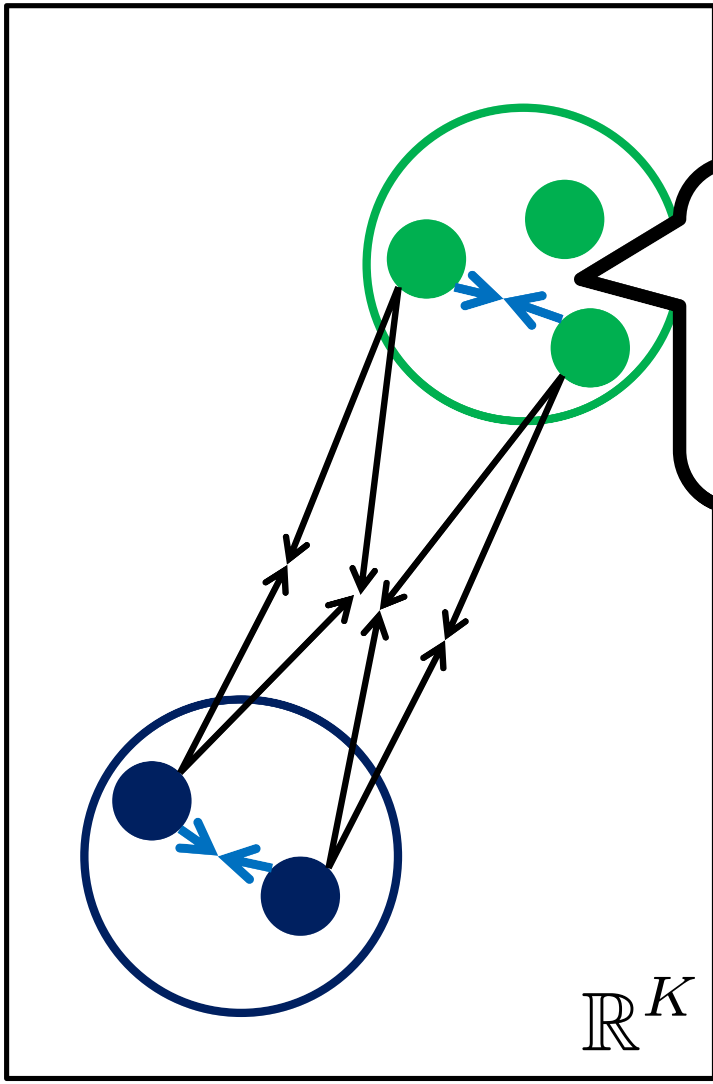
数値例が示唆すること:

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\tilde{w}_{ij}^{12}\|(\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_i^1 - (\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_j^2\|_2^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{i'=1}^{n_1}\tilde{w}_{ii'}^{11}\|(\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_i^1 - (\boldsymbol{A}^1)^\top \boldsymbol{x}_{i'}^1\|_2^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{j'=1}^{n_2}\tilde{w}_{jj'}^{22}\|(\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_j^2 - (\boldsymbol{A}^2)^\top \boldsymbol{x}_{j'}^2\|_2^2$$

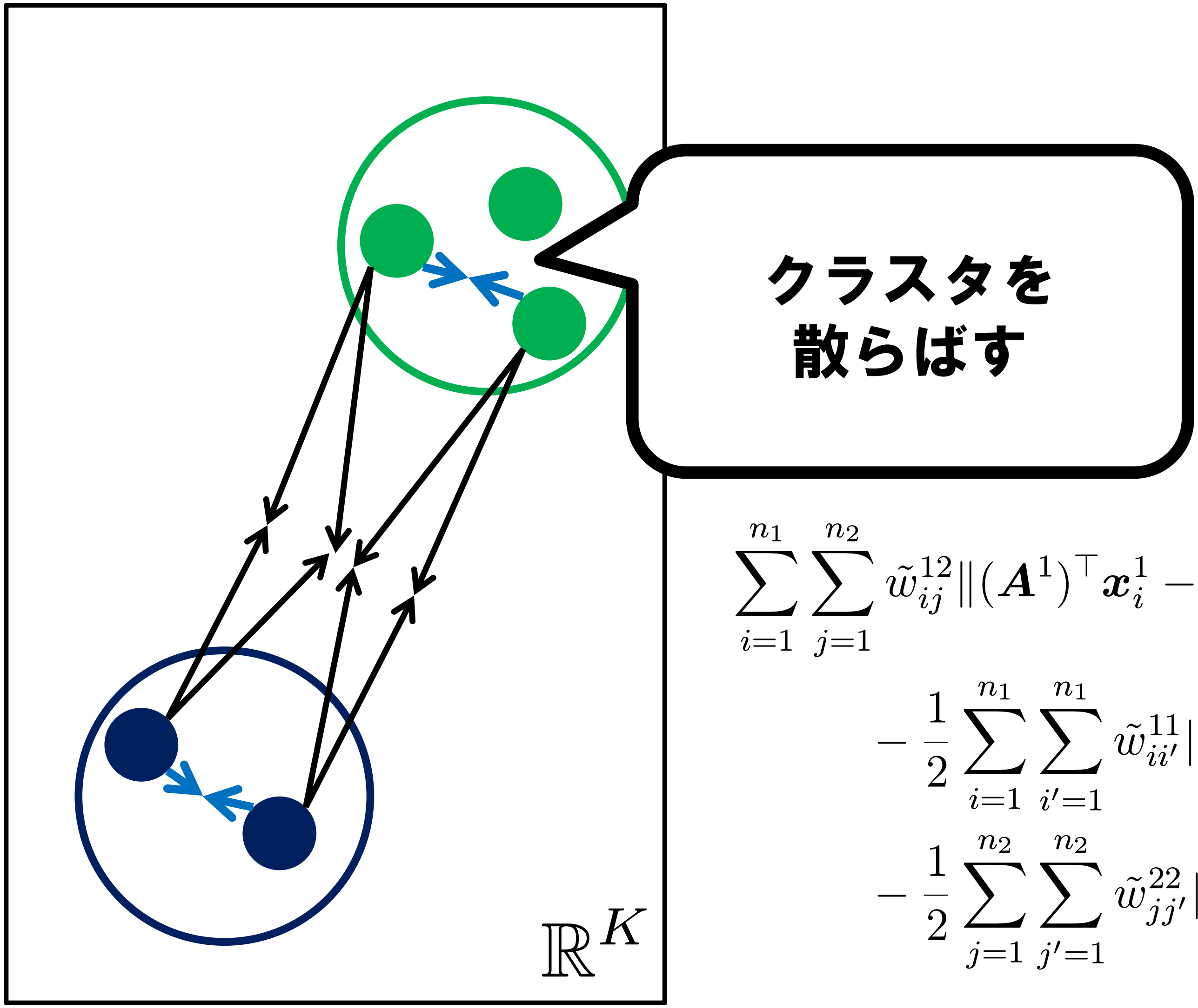
Intraの損失は，引かなければならない



クラスタどうしが
勝手にくっつく

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\tilde{w}_{ij}^{12}\|(\boldsymbol{A}^1)^\top\boldsymbol{x}_i^1-(\boldsymbol{A}^2)^\top\boldsymbol{x}_j^2\|_2^2$$

ドメイン間の接続のみ



$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\tilde{w}_{ij}^{12}\|(\boldsymbol{A}^1)^\top\boldsymbol{x}_i^1-(\boldsymbol{A}^2)^\top\boldsymbol{x}_j^2\|_2^2\\
&\qquad-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{i'=1}^{n_1}\tilde{w}_{ii'}^{11}\|(\boldsymbol{A}^1)^\top\boldsymbol{x}_i^1-(\boldsymbol{A}^1)^\top\boldsymbol{x}_{i'}^1\|_2^2\\
&\qquad-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{j'=1}^{n_2}\tilde{w}_{jj'}^{22}\|(\boldsymbol{A}^2)^\top\boldsymbol{x}_j^2-(\boldsymbol{A}^2)^\top\boldsymbol{x}_{j'}^2\|_2^2
\end{aligned}
$$

主要な結果

(生成モデルが) 次の条件を満たすとする.

（1） $\boldsymbol{B}^1, \boldsymbol{B}^2 \neq \boldsymbol{O}$

（2） $E_Q[\|\boldsymbol{x}_1^0\|_\infty^2] < \infty$

（3） $E_{F_{n^d}}[(n_t^d)^2] < \infty$

（4） $P[n_t^d \geq 2] > 0$

多対多の対応が存在

このとき，生成モデルの下で，

$\boldsymbol{\beta = -1}$ ⇨ $\mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{A}}) \xrightarrow{p} 0, \quad (n_0 \to \infty)$

Intra graphの推定

- Inter graphからIntra graphを推定できる．

$$\hat{\boldsymbol{W}}^{11} = \boldsymbol{W}^{12}(\boldsymbol{W}^{12})^\top$$

$$\hat{\boldsymbol{W}}^{22} = (\boldsymbol{W}^{12})^\top \boldsymbol{W}^{12}$$

Intra graph(既知)を推定量に置き換えても，
同様の結果が成り立つ．

数値実験:

$\tilde{\mathcal{E}}(\boldsymbol{A})$:規格化した誤差

設定:

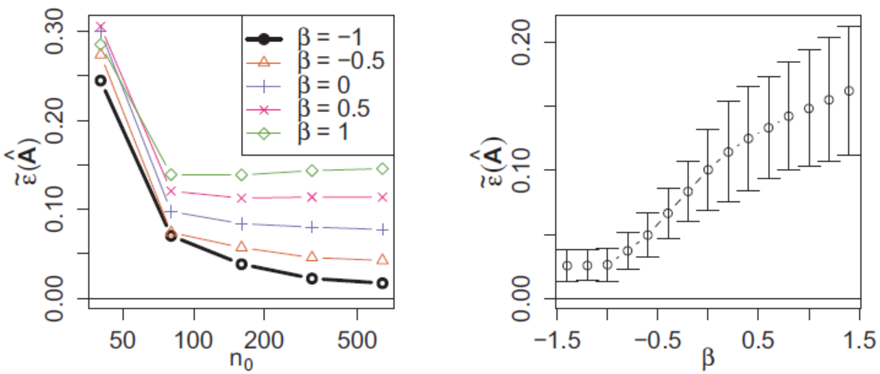
$$p_0 = 3, p_1 = 5, p_2 = 7,$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^1 = \sigma_1^2 \boldsymbol{I}_{p_1}, \boldsymbol{\Sigma}^2 = \sigma_{„}^2 \boldsymbol{I}_{p_2},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_X = ((\boldsymbol{\Sigma}_X)_{ij}) = (2^{-|i-j|}),$$

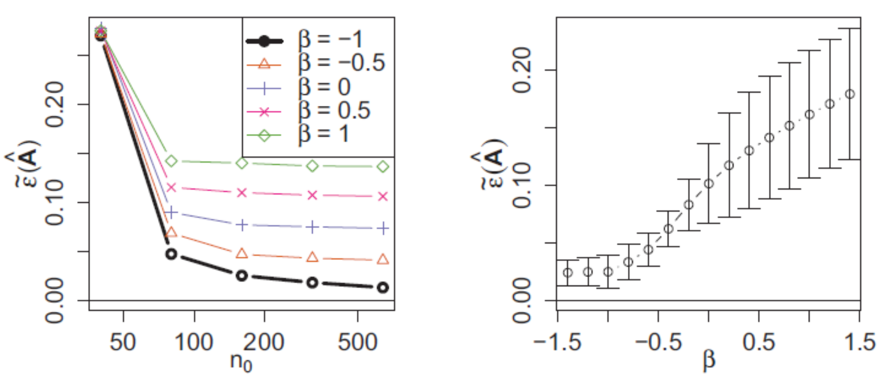
$$Q = N[\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_X]$$

$\boldsymbol{B}^1, \boldsymbol{B}^2$ の各要素は標準正規分布から生成



(a) $\tilde{\mathcal{E}}(\hat{\boldsymbol{A}}_\beta)$ (b) $\tilde{\mathcal{E}}(\hat{\boldsymbol{A}}_\beta) \pm \sigma(\hat{\boldsymbol{A}}_\beta)$

Figure 1: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$

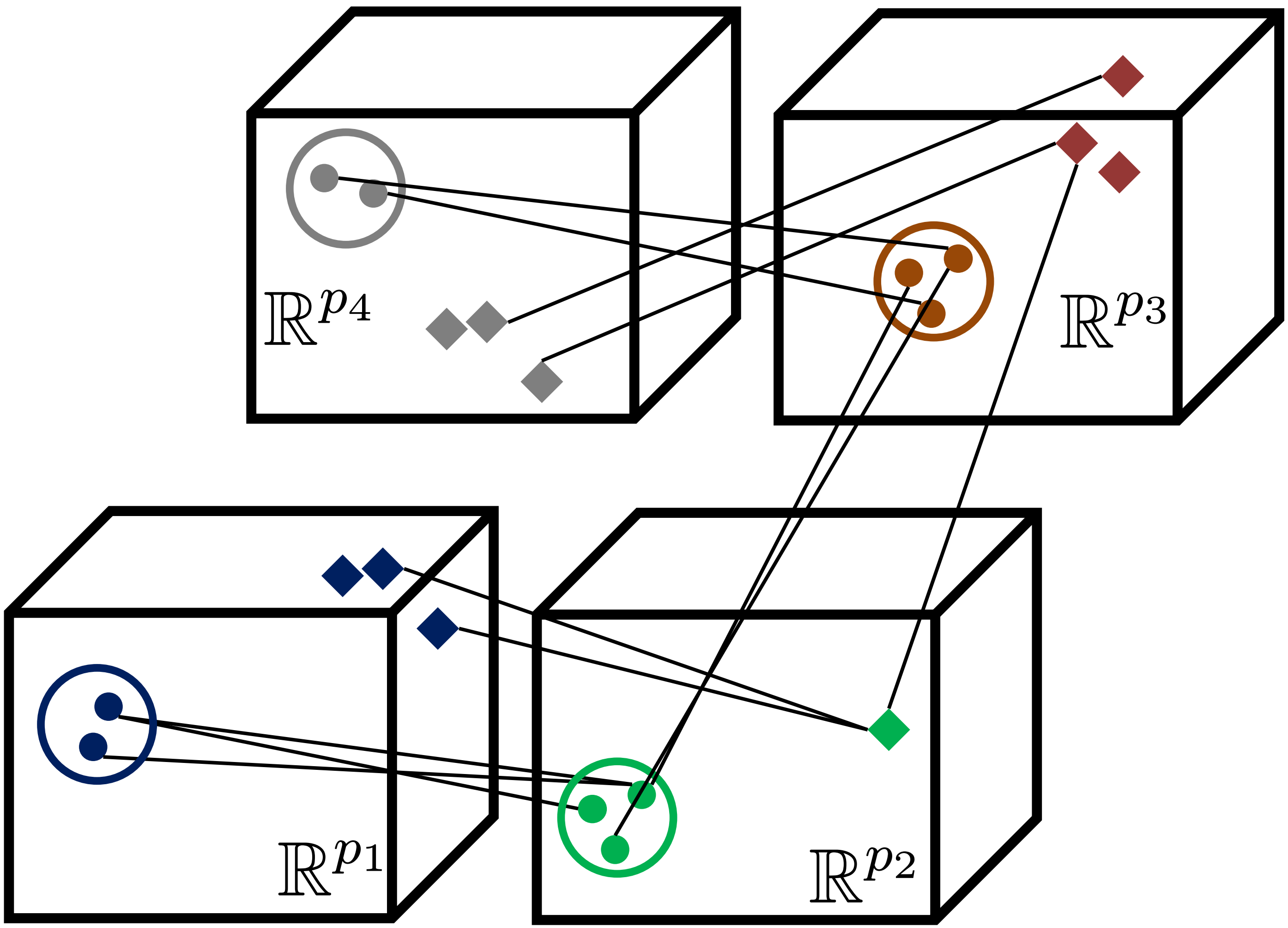


(a) $\tilde{\mathcal{E}}(\hat{\boldsymbol{A}}_\beta)$ (b) $\tilde{\mathcal{E}}(\hat{\boldsymbol{A}}_\beta) \pm \sigma(\hat{\boldsymbol{A}}_\beta)$

Figure 2: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$

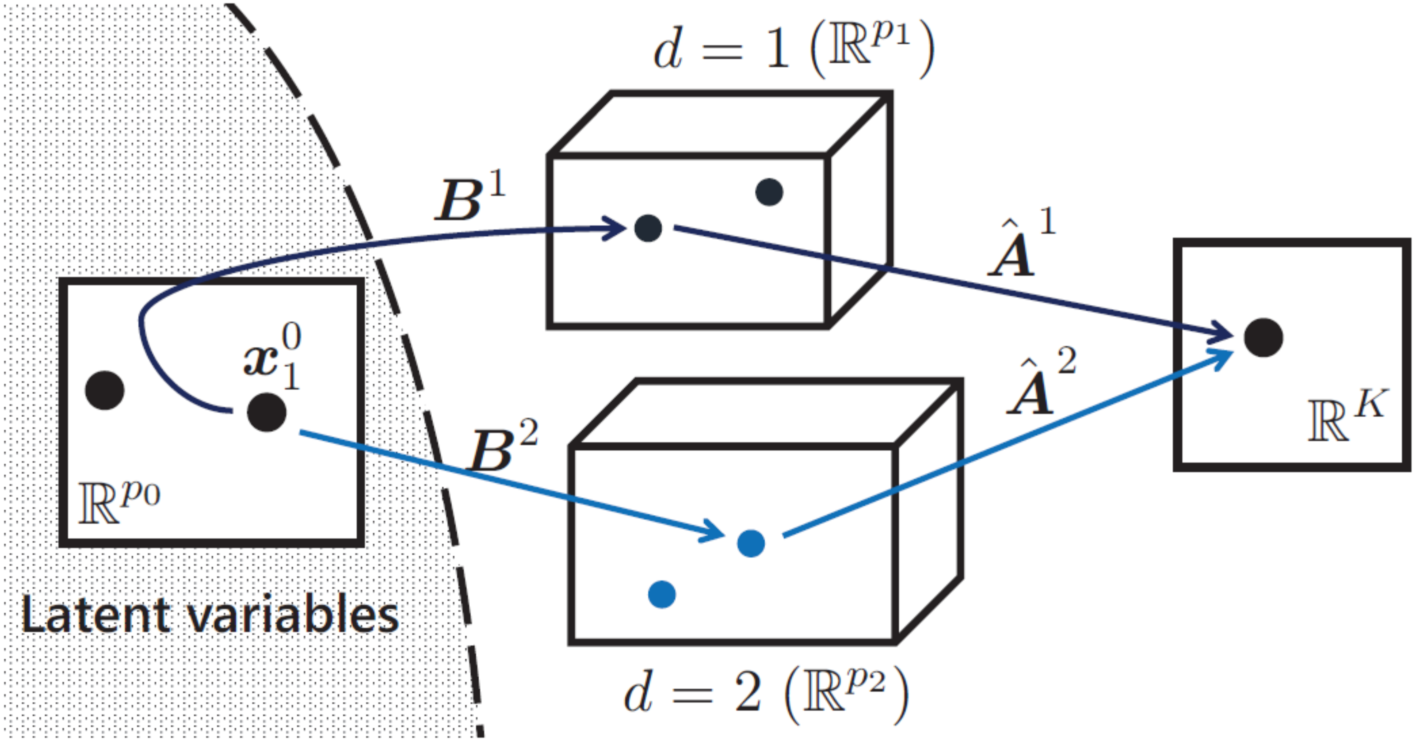
ドメインを増やしても，同様の結果が成り立つ

$\{\boldsymbol{x}_l^4\}_{l=1}^{n_4} \subset \mathbb{R}^{p_4}$ $\{\boldsymbol{x}_k^2\}_{k=1}^{n_3} \subset \mathbb{R}^{p_3}$



$\{\boldsymbol{x}_i^1\}_{i=1}^{n_1} \subset \mathbb{R}^{p_1}$ $\{\boldsymbol{x}_j^2\}_{j=1}^{n_2} \subset \mathbb{R}^{p_2}$

発表のまとめ:



- 多対多対応を持つベクトルの生成モデルを提案
- Matching Consistencyの定義
- Matching Consistentであるための条件を提示
- (以上の結果は，多ドメインにも容易に拡張できる)

References (cited in slides)

1. Huang, Z., Shan, S., Zhang, H., Lao, S., & Chen, X. (2013). Cross-view graph embedding. *Computer Vision–ACCV 2012*.
2. Hotelling, H. (1936). Relations between two sets of variates. *Biometrika*, *28*, 321–377.
3. Bach, F. R., & Jordan, M. I. (2005). *A Probabilistic Interpretation of Canonical Correlation Analysis*. *University of Barkley* (Vol. 688).
4. Shimodaira, H. Cross-validation of matching correlation analysis by resampling matching weights. *Neural Networks* **75,** 126–140 (2016).

References (additional)

5. Nori, N., Bollegala, D., & Kashima, H. (2012). Multinomial relation prediction in social data: a dimension reduction approach. *Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 115–121.
6. Yan, S., Xu, D., Zhang, B., Zhang, H. J., Yang, Q., & Lin, S. (2007). Graph embedding and extensions: A general framework for dimensionality reduction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *29*(1), 40–51.
7. He, X., & Niyogi, P. (2004). Locality preserving projections. *Neural Information Processing Systems*, *16*, 153.
8. Kettenring, J. R. (1971). Analysis of Several Sets of Variables. *Biometrika*, *58*(3), 433–451.

References (additional)

9. Anderson, T. W. (2003). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (2nd ed.). New York: Wiley.
10. Davis, C., & Kahan, W. M. (1969). Some new bounds on perturbation of subspaces. *Bull. Amer. Math. Soc*, *75*(4), 863–868.
11. Luxburg, U. (2007). A tutorial on spectral clustering. *Statistics and Computing*, *17*(4), 395–416.
12. Fukui, K., Okuno, A., & Shimodaira, H. (2016). IMAGE AND TAG RETRIEVAL BY LEVERAGING IMAGE-GROUP LINKS WITH MULTI-DOMAIN GRAPH EMBEDDING. In the proceedings of *International Conference on Image Processing (To appear)*.
13. Oshikiri, T., Fukui, K., & Shimodaira, H. (2016) Cross-Lingual Eigenwords. In the proceedings of ACL.

生成モデル

既知 $n_0 \in \mathbb{N}(\geq 1),\ \boldsymbol{B}^d \in \mathbb{R}^{p_0 \times p_d}\ \ (p_0 \leq p_1, p_2)$

確率変数
(すべてiid)

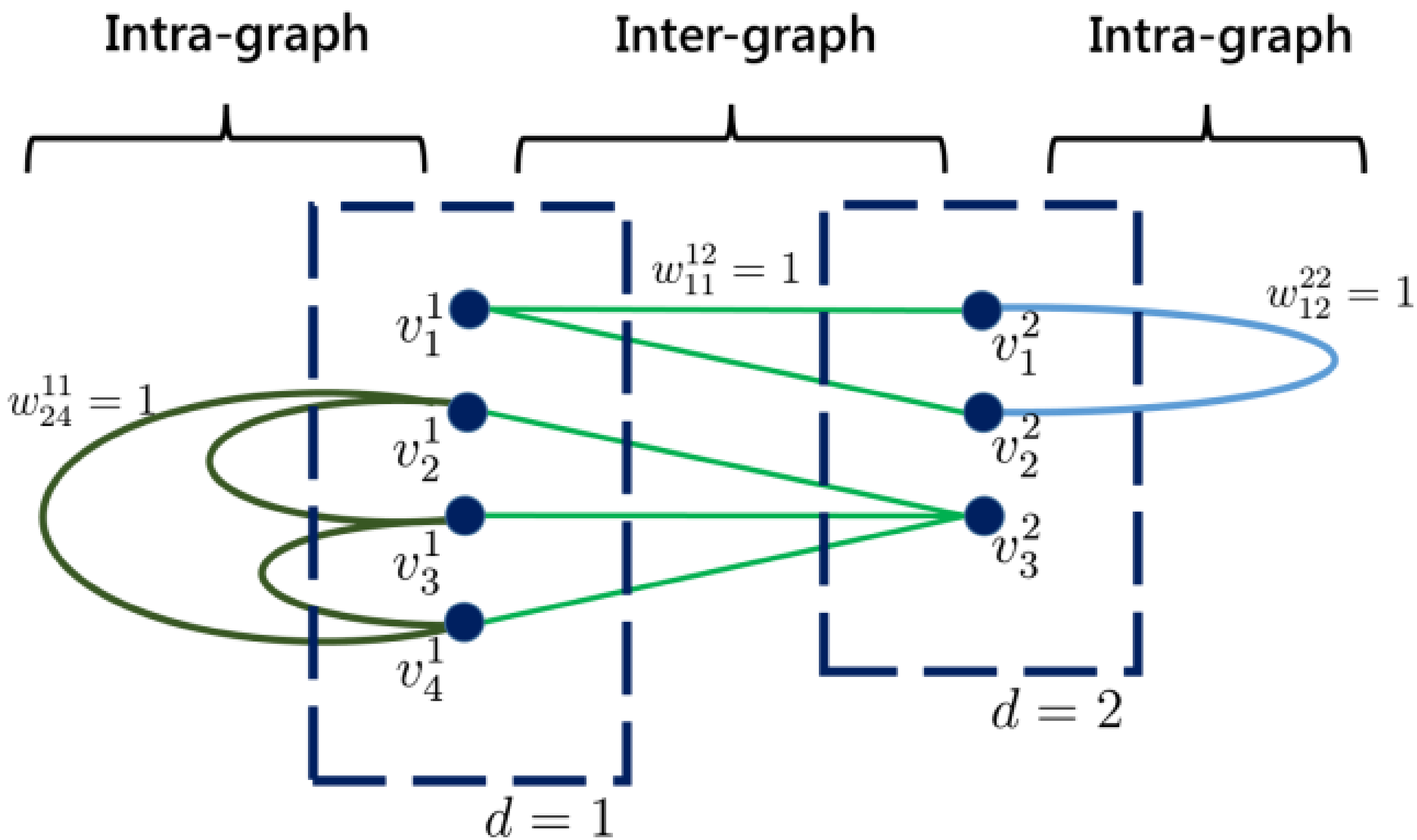
$$\boldsymbol{x}_t^0 \sim Q$$
$$n_t^d \sim F_{n^d}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t,i}^d \sim N_{p_d}[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}^d]$$
$$z_{t,i;t',j} \sim \mathrm{Be}(\alpha)$$

$(\boldsymbol{\Sigma}^d \succ 0,\ \alpha > 0)$

データベクトル/リンク

$$\boldsymbol{x}_{t,i}^d = (\boldsymbol{B}^d)^\top \boldsymbol{x}_t^d + \boldsymbol{\varepsilon}_{t,i}^d \qquad (i \in [n_t^1]; t \in [n_0]; d \in [2])$$

$$w_{t,i;t',j} = \delta_{t,t'} z_{t,i;t',j} \qquad (i \in [n_t^1]; j \in [n_{t'}^2]; t, t' \in [n_0])$$



Intra-graph
Inter-graph
Intra-graph
$w_{11}^{12} = 1$
$w_{12}^{22} = 1$
$w_{24}^{11} = 1$
v_1^1
v_2^1
v_3^1
v_4^1
v_1^2
v_2^2
v_3^2
$d = 2$
$d = 1$

CvGEの定式化：

$$(\hat{\boldsymbol{A}}^1, \hat{\boldsymbol{A}}^2) := \mathop{\arg\min}_{(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2) \in \mathcal{S}} L(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2)$$

$$\mathcal{S} := \left\{ (\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2) \in \mathbb{R}^{p_1 \times K} \times \mathbb{R}^{p_2 \times K} \middle| \sum_{d=1}^{2} \sum_{e=1}^{2} (\boldsymbol{A}^d)^\top \boldsymbol{G}^{de} \boldsymbol{A}^e = \boldsymbol{I}_K \right\}$$

今回考えるセッティング：

$\eta_n > 0, \ (\eta_n \to 0)$

$$\boldsymbol{G}^{11} = (\boldsymbol{X}^1)^\top \tilde{\boldsymbol{M}}^1 \boldsymbol{X}^1 + \eta_{\min\{n_1, n_2\}} \boldsymbol{I}_{p_1},$$

$$\boldsymbol{G}^{12} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{G}^{21} = \boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{G}^{22} = (\boldsymbol{X}^2)^\top \tilde{\boldsymbol{M}}^2 \boldsymbol{X}^2 + \eta_{\min\{n_1, n_2\}} \boldsymbol{I}_{p_2}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{M}}^1 = \mathrm{diag}(\boldsymbol{W}^{12} \boldsymbol{1}), \tilde{\boldsymbol{M}}^2 = \mathrm{diag}((\boldsymbol{W}^{12})^\top \boldsymbol{1}) \right)$$

Solution of CvGE Let $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(p_1+p_2)\times K}$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2)\times(p_1+p_2)}$, $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$, and $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{(p_1+p_2)\times(p_1+p_2)}$ be concatenations of some matrices as

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^1 \\ \boldsymbol{A}^2 \end{pmatrix}, \ \tilde{\boldsymbol{W}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \tilde{\boldsymbol{W}}^{11} & \tilde{\boldsymbol{W}}^{12} \\ (\tilde{\boldsymbol{W}}^{12})^\top & \beta_2 \tilde{\boldsymbol{W}}^{22} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{G}^{11} & \boldsymbol{G}^{12} \\ \boldsymbol{G}^{21} & \boldsymbol{G}^{22} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}^1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{X}^1 \in \mathbb{R}^{n_1\times p_1}, \boldsymbol{X}^2 \in \mathbb{R}^{n_2\times p_2}$ are data matrices composed of $\{\boldsymbol{x}_i^1\}_{i=1}^{n_1}$ and $\{\boldsymbol{x}_j^2\}_{j=1}^{n_2}$, respectively. $\tilde{\boldsymbol{W}}^{de}$ $(d, e \in \{1, 2\})$ are rescaled inter/intra-adjacency matrices. Let $\mathcal{L}(\boldsymbol{W})$ $(= \mathrm{diag}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{1}) - \boldsymbol{W})$ denote a laplacian matrix that follows directly from $\boldsymbol{W}$, then the problem of CvGE can be simplified to a minimization problem of $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{X}^\top\mathcal{L}(\boldsymbol{W})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ with a quadratic constraint $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_K$. The solution $\hat{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{(p_1+p_2)\times K}$ is obtained as $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{G}^{-1/2}(\hat{\boldsymbol{u}}_1 \ \hat{\boldsymbol{u}}_2 \ \cdots \ \hat{\boldsymbol{u}}_K)$, where $\hat{\boldsymbol{u}}_k$ is the eigenvector of $\boldsymbol{G}^{-1/2}\mathcal{L}(\tilde{\boldsymbol{W}})\boldsymbol{G}^{-1/2}$ such that $\boldsymbol{G}^{-1/2}\mathcal{L}(\tilde{\boldsymbol{W}})\boldsymbol{G}^{-1/2}\hat{\boldsymbol{u}}_k = \lambda_k\hat{\boldsymbol{u}}_k$, $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_p)$.