

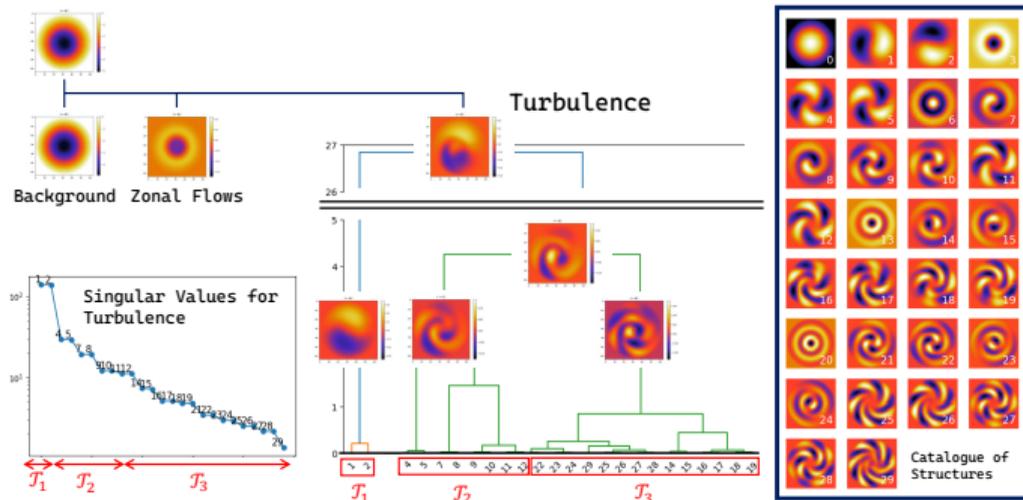
A Systematic Approach to Decomposing Numerical Turbulence Fields into Substructures

Akifumi Okuno^{1,2}, Makoto Sasaki³

¹統計数理研究所 ²理化学研究所 ³日本大学

Overview

- ▶ 数値乱流場 (静電ポテンシャル $\phi(x, y, t)$) のモードのクラスタリング



- ▶ Okuno, Kodahara, and Sasaki, "Hierarchical Clustering of Modes in Numerical Turbulence Fields", PFR: Rapid Communications (2024).
- ▶ Okuno and Sasaki, "A Systematic Approach to Decomposing Numerical Turbulence Fields into Substructures", submitted.

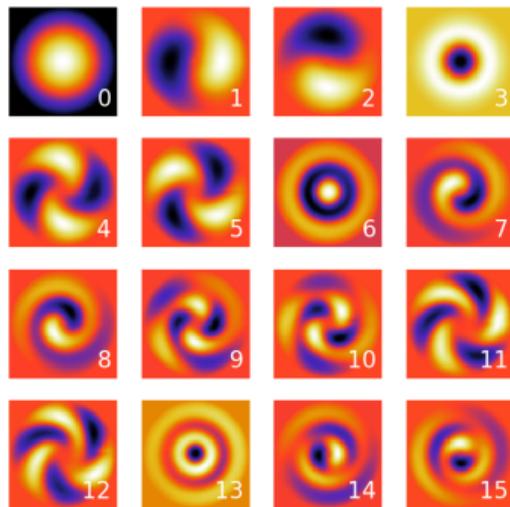
Okuno, Kodahara, and Sasaki
階層型クラスタリング

背景 (1/2)

- ▶ 核融合プラズマの特性は乱流に支配されており、動的現象の理解が喫緊の課題。
 - ▶ 本研究では乱流シミュレーションにより得られた静電ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ を考える。
 - ▶ 乱流を直接的に扱うことは難しい。ので分解をしたい。
- ▶ 単純なフーリエ展開では多くの自由度(基底)が生じる。
 - ▶ 分解の粒度が細かすぎて、内部の挙動を理解することは困難。
- ▶ 動的モード分解 (Sasaki et al. PPCF2019) やニューラルネット (Jajima et al. PPCF2023) を利用した解析手法が報告されている。

背景 (2/2)

- ▶ 特異値分解 (SVD) を利用して乱流を分解し, その過程を解析するアプローチが提案されている (Sasaki et al. PPCF2019; Kodahara et al. PFR2023).
- ▶ SVDでも多くの自由度(基底)が残る.



- ▶ 本研究では「乱流の分解」を体系的に扱う方法を考える.

静電ポテンシャルの分解

- ▶ 乱流 (静電ポテンシャル) $\phi(x, y, t)$ をそのまま扱うのは難しいので、独立な要素 ϕ_1, ϕ_2, \dots に分解:

$$\phi(x, y, t) = \sum_{j \geq 0} \phi_j(x, y, t).$$

特異値分解 (a.k.a., 主成分分析)

$$\phi_j(x, y, t) = s_j \Psi_j(x, y) h_j(t).$$

s_j は特異値 (要素 j の重要度), $\Psi_j(x, y)$ は空間構造, $h_j(t)$ は時間発展を表す.

- ▶ 実際にはシミュレーションの観測値から離散的に計算する.

より詳細な構造 $\Psi_j(x, y)$ のリスト

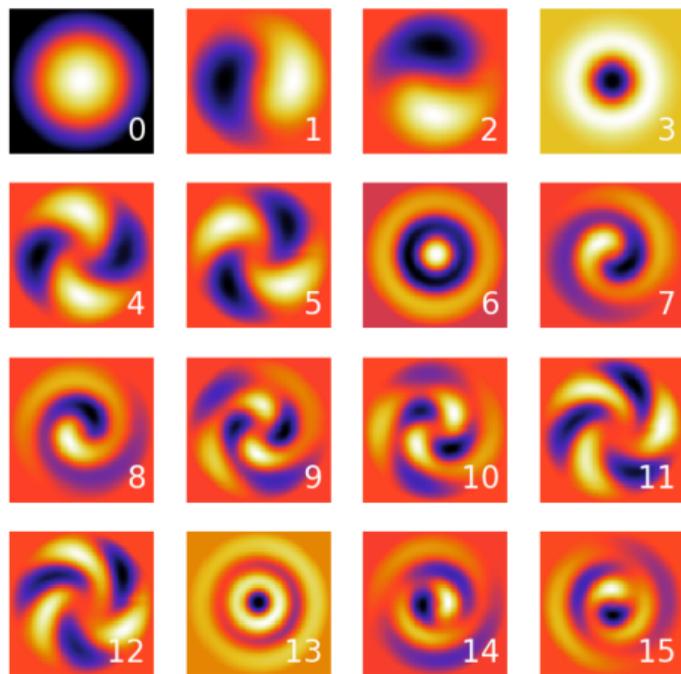
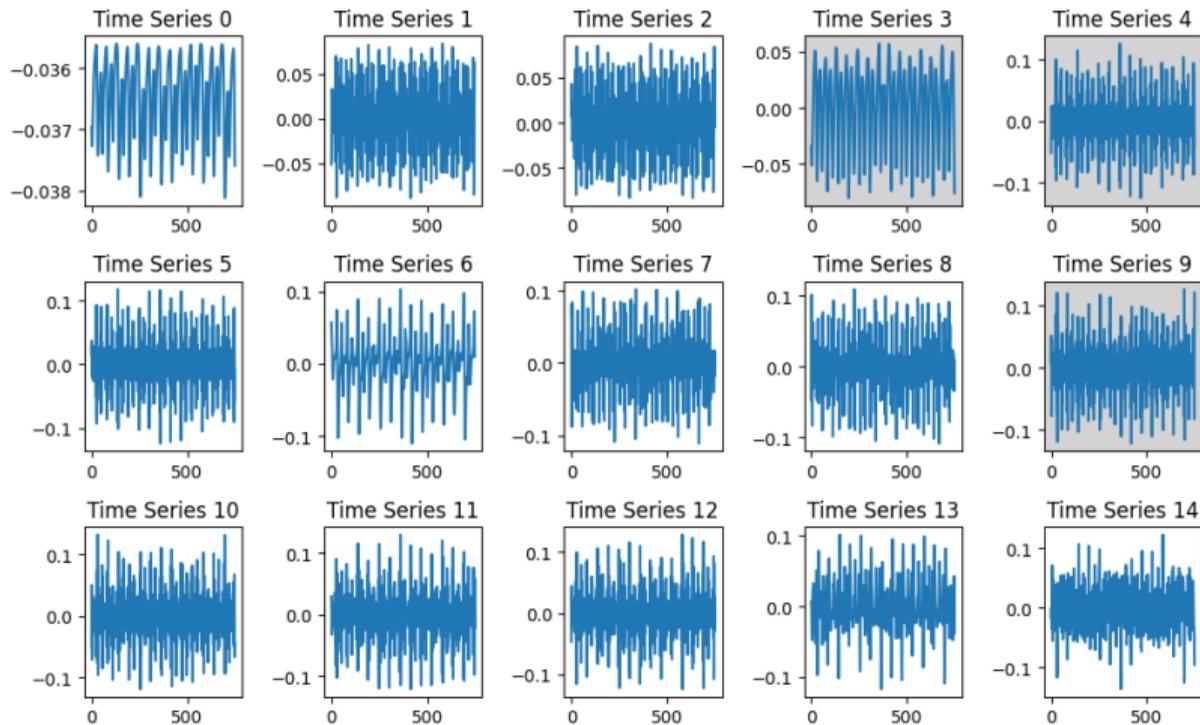


Figure: 背景構造 ($j = 0$), Zonal ($j = 3, 13, \dots$), 乱流 (それ以外)

時間成分 $h_j(t)$ のリスト



構造を分解する手続き

- (1) (とびぬけて寄与率大きい) $j = 0$ を背景構造とする
- (2) $v(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ として, 周方向の Ψ_j の変動の総和

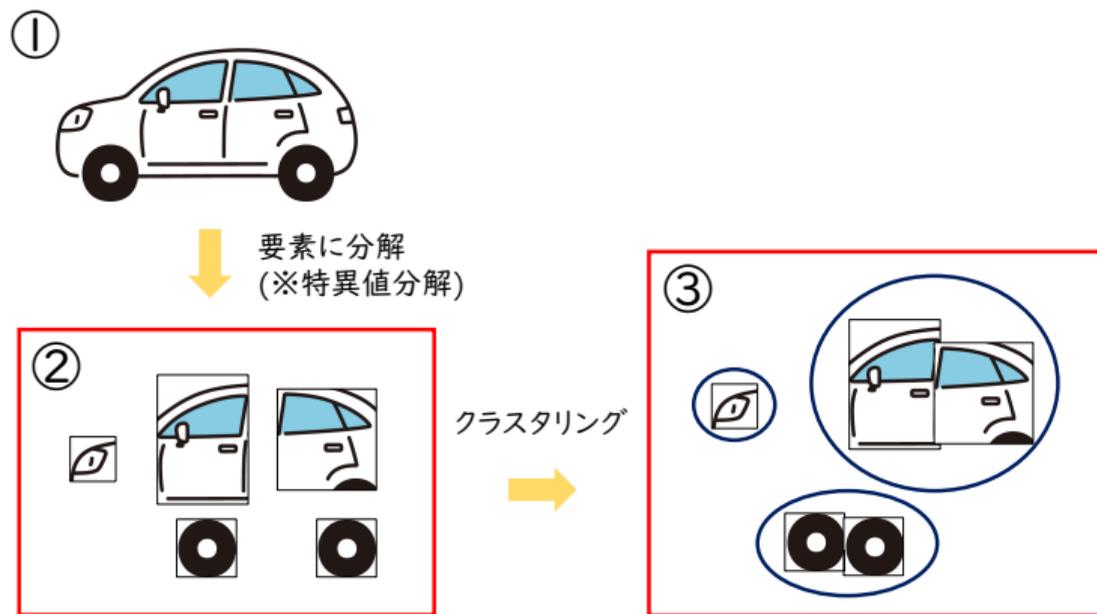
$$c_j := \iint \left\{ \frac{\partial \Psi_j(v(r, \theta))}{\partial \theta} \right\}^2 dr d\theta, (j = 1, 2, \dots)$$

を計算する.

- ▶ c_j が特定の閾値 c_* より小さければ(周方向に変動が小さいので)帯状流,
- ▶ そうでなければ乱流の成分とする.

- (3) 帯状流, 乱流の要素をそれぞれクラスタリングしてまとめる.

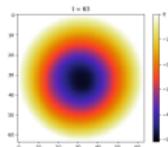
クラスタリングとは?



- ▶ クラスタリング=似た要素をまとめ上げる手続き。

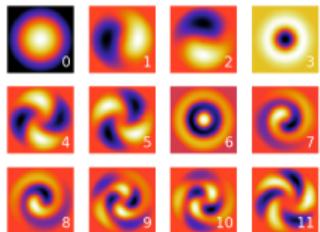
数値乱流場の場合はどうなる？

①



要素に分解
(※特異値分解)

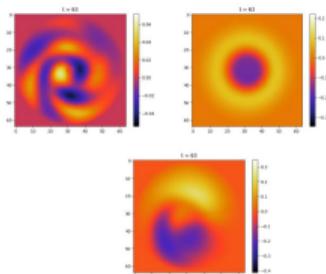
②



クラスタリング



③



▶ 最終的に、「細かすぎない」分解が得られる。

代表的なクラスタリング手法と要望

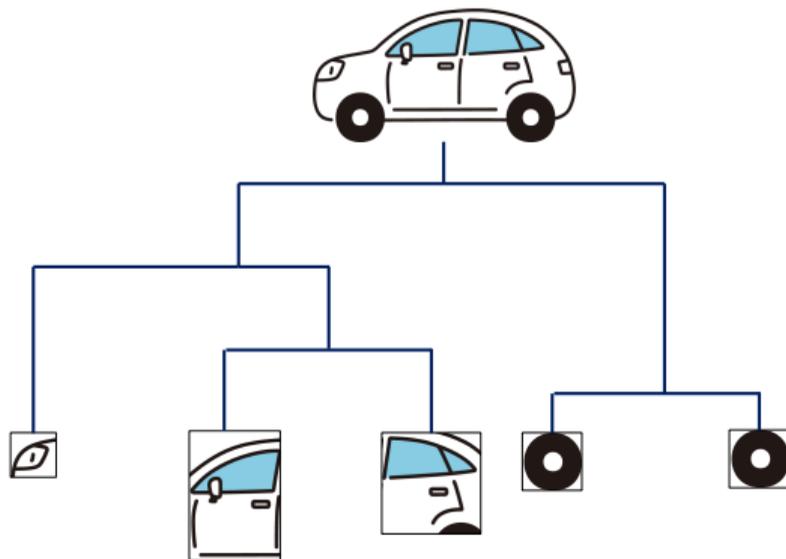
- ▶ Sasaki et al. (PoP2019) ⇒ 手動でのクラスタリング.
- ▶ 自動化も可能.
 1. k -meansクラスタリング,
 2. mean-shiftクラスタリング,
 3. 混合正規クラスタリング,...

基本的には“いくつかのクラスにまとめるか”を指定してクラスタリングする.

- ▶ 自動化しつつ、粒度の設定をフレキシブルにしたい.

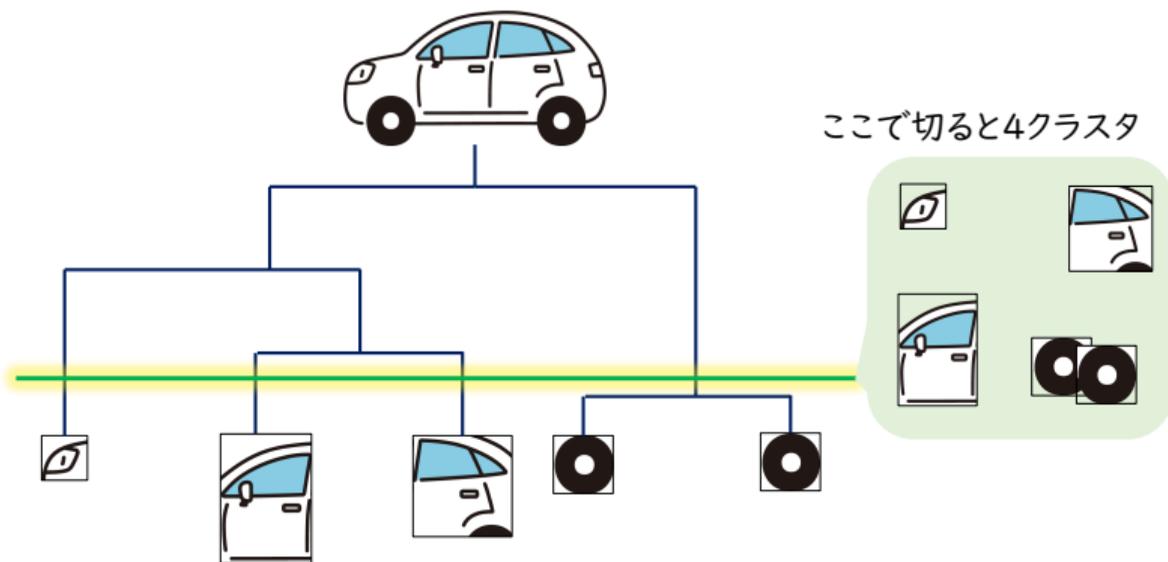
階層型クラスタリング

- ▶ 全体を、徐々に要素に分解する手法.



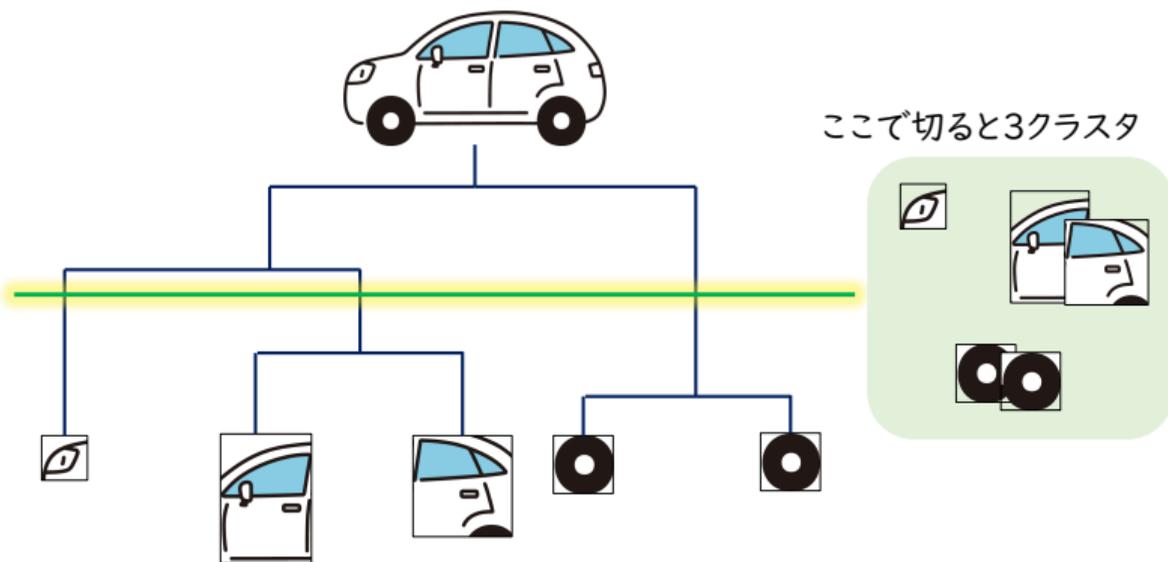
階層型クラスタリング

▶ 細かいまとめ方 (4クラスタ)



階層型クラスタリング: より荒い分類

- ▶ もっと大まかなまとめ方 (3クラス)



どうやって計算するのか?

1. 要素 i, j 間の乖離度(距離) d_{ij} を計算.
2. パッケージに $D = (d_{ij})$ を投げる \Rightarrow デンドログラムが生成される.
3. おわり.

```
linkage_D = linkage(D, method="ward")  
dendrogram(linkage_D)
```

- ▶ 距離 d_{ij} が近いものから徐々に合体させていくクラスタリング.

今回の設定では

モード $\{\phi_j(x, y, t)\}_j$ をまとめたいので、モード ϕ_i, ϕ_j の間の乖離度を定義する必要がある。
いくつかの候補があった。

- ▶ 回転を無視した構造の乖離度: $d_{ij} = \min_{\mathcal{O}: \text{回転行列}} \|\Psi_i - \mathcal{O}\Psi_j\|,$
- ▶ $h_i(t), h_j(t)$ の周波数の乖離度,
- ▶ 特異値の乖離度 $d_{ij} = |s_i - s_j|, \dots$

結論から言うと…

- ▶ 特異値の乖離度で階層型クラスタリング(ward法)するのが一番素朴でよかった。

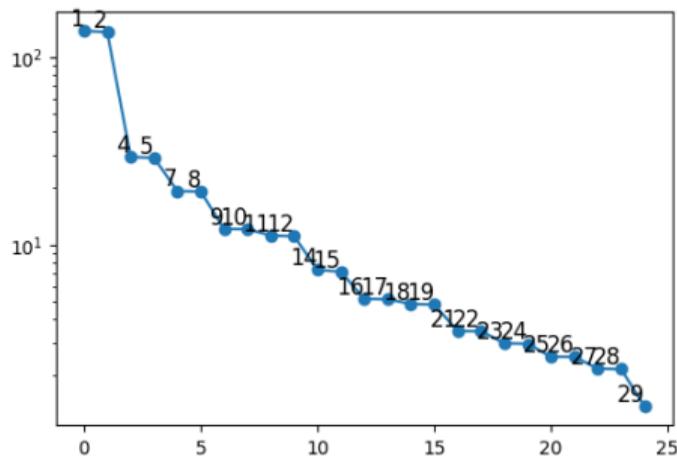


Figure: 第1特異値-第30特異値のプロット.

各クラスター $\mathcal{J} \subset \{1, 2, \dots\}$ について, $\phi_{\mathcal{J}}(x, y, t) = \sum_{j \in \mathcal{J}} s_j \Psi_j(x, y) h_j(t)$ を計算する.

得られたデンドログラムと、その帰結としての分解

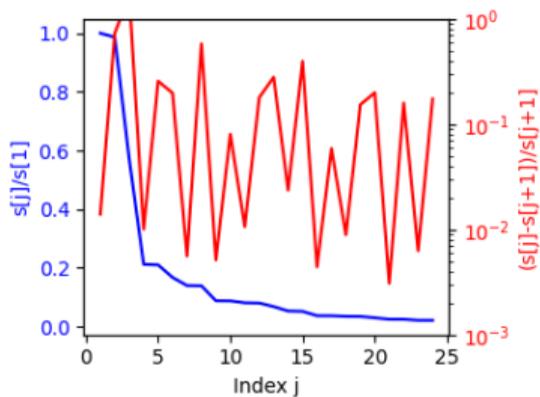


- ▶ 乱流がさらに**線形不安定モード**・**非線形モード**に分解された。
 - ▶ **非線形モード**は突発性に重要な寄与をする可能性 (Sasaki et al. PPCF2020).
 - ▶ これまでの「背景・帯状流・乱流」の3分割より細かくできる.

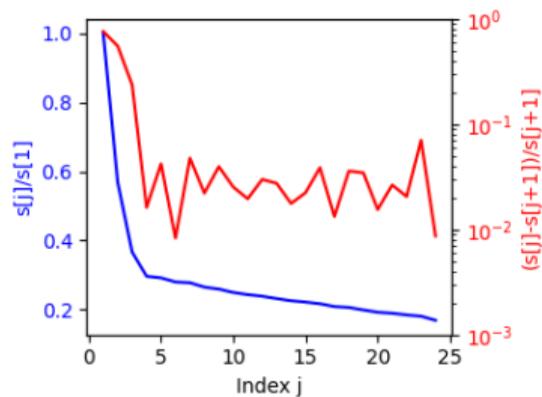
Okuno and Sasaki
自由度が高い乱流の分解

背景

- ▶ SVDなどで分解したモードが重複した特異値を持つ=自由度は低め.



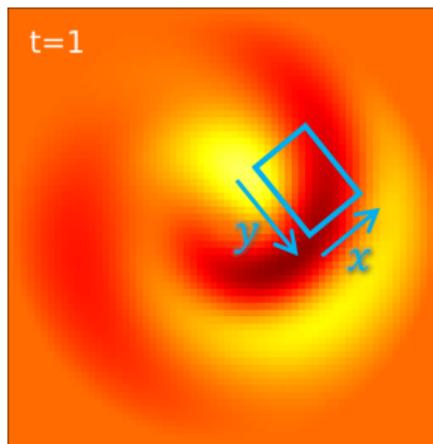
(a) 前節の乱流の特異値 (自由度低め)



(b) 今回扱う乱流の特異値 (自由度高め)

- ▶ より複雑な乱流の分解になる.
- ▶ 何かしら物理的な情報を入れて考えたい.

座標系の変更



微小四角形領域を切り取る. (x : radial, y : poloidal).

- ▶ zonal成分を引っ張り出せる :

$$\phi_{ZF}(x, y, t) = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int \phi(x, y, t) dy.$$

残りの成分を乱流とする

乱流成分を

$$\phi_{\text{turb}}(x, y, t) = \phi(x, y, t) - \phi_{\text{ZF}}(x, y, t)$$

として、これを分解したい。どうやるか？

- ▶ poloidal velocity of the zonal flowを

$$V[\phi_{\text{ZF}}](x, t) = \int \frac{\partial \phi_{\text{ZF}}(x, y, t)}{\partial x} dy$$

として、運動エネルギー密度がこのvelocityと類似するもの ϕ_{pos} , 逆になるもの ϕ_{neg} , その他 ϕ_{res} に分解する： $\phi_{\text{turb}} = \phi_{\text{pos}} + \phi_{\text{neg}} + \phi_{\text{res}}$.

エネルギーの分解

- ▶ Kinetic Energy Density:

$$I[\phi](x, t) = \int \left\{ \left(\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 \right\} dy. \quad (1)$$

- ▶ 渦を分解する以上は、この密度も分解したい：

$$I[\phi_j + \phi_k](x, t) = I[\phi_j](x, t) + I[\phi_k](x, t) + \underbrace{\nu_x(x, t) + \nu_y(x, t)}_{\text{Interaction}} \quad (2)$$

が、相互作用項 ν_x, ν_y が残ってしまう。特に先ほど使っていたSVD
 $\phi(x, y, t) = \sum_j s_j \psi_j(x, y) h_j(t)$ だと相互作用項が残る
($I[\phi_j + \phi_k](x, t) \neq I[\phi_j](x, t) + I[\phi_k](x, t)$).

状況の整理

- (1) エネルギー密度が分解可能なモード $\{\phi_j(x, y, t)\}_j$ が得られた :

$$\phi_{\text{turb}}(x, y, t) = \sum_j \phi_j(x, y, t), \quad I[\phi_j + \phi_k](x, t) = I[\phi_j](x, t) + I[\phi_k](x, t).$$

- (2) 互いに素な添え字集合 $J_{\text{pos}}, J_{\text{neg}}, J_{\text{res}} \subset \{1, 2, \dots\}$ をいい感じに作り,

$$\phi_{\text{pos}}(x, y, t) = \sum_{j \in J_{\text{pos}}} \phi_j(x, y, t), \quad \phi_{\text{neg}}(x, y, t) = \sum_{j \in J_{\text{neg}}} \phi_j(x, y, t)$$

のエネルギー密度 $I[\phi_{\text{pos}}](x, t), I[\phi_{\text{neg}}](x, t)$ が poloidal velocity of ZF $V[\phi_{\text{ZF}}](x, t)$ と正/負の相関を持つようにしたい。

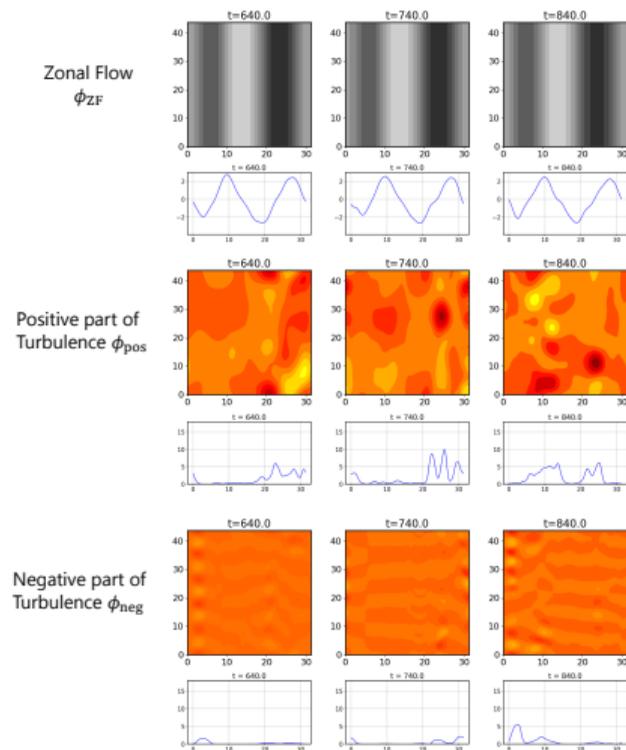


Figure: **shot26**: Temporal evolution (at $t = 640, 740, 840$) of the zonal flow and positive/negative substructures.